



Merkhilfe Mathematik

Dies ist keine Formelsammlung im klassischen Sinn - die verwendeten Bezeichnungen werden nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln werden in der Regel nicht angegeben.

Teil I: Stoffgebiete der Mittelstufe

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Lösungsformel für $x^2 + px + q = 0$:
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-q + \frac{p^2}{4}}$$

Potenzen

- Negative Exponenten: $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- Gebrochene Exponenten: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- Potenzgesetze: (P1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (P2) $a^x : a^y = a^{x-y}$
(P3) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ (P4) $a^x : b^x = (a : b)^x$
(P5) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Logarithmen

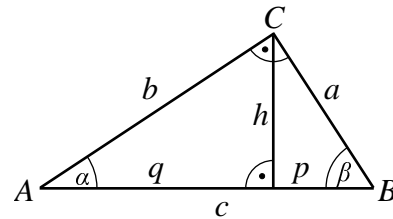
- Logarithmengesetze: (L1) $\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$
(L2) $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$
(L3) $\log_b(u^r) = r \cdot \log_b(u)$
- Basisumrechnung: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Ähnliche Dreiecke

- Wenn zwei Dreiecke in den Maßen zweier Winkel übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.
- In ähnlichen Dreiecken sind die Längenverhältnisse entsprechender Seiten gleich.

Rechtwinkliges Dreieck

- Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
- Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$
- Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$; $b^2 = c \cdot q$
- Winkelfunktionen:



$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad ; \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad ; \quad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a}{b}$$

Besondere Winkel

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

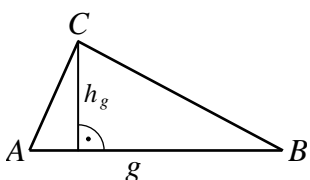
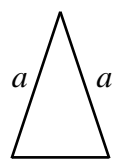
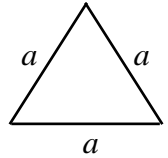
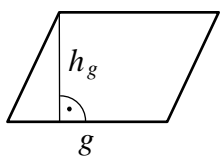
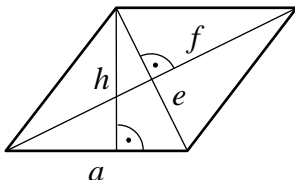
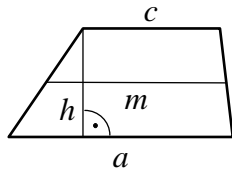
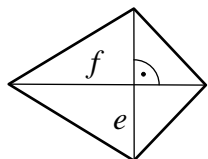
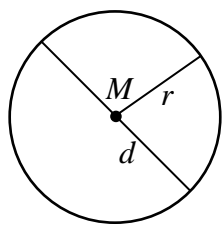
Allgemeines Dreieck

- Sinussatz: $a : b = \sin(\alpha) : \sin(\beta)$
 $a : c = \sin(\alpha) : \sin(\gamma)$
 $b : c = \sin(\beta) : \sin(\gamma)$
- Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

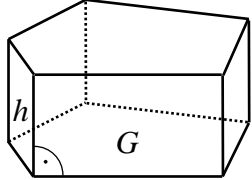
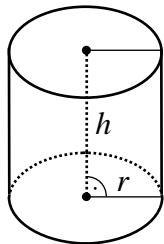
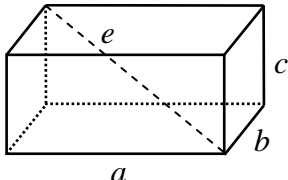
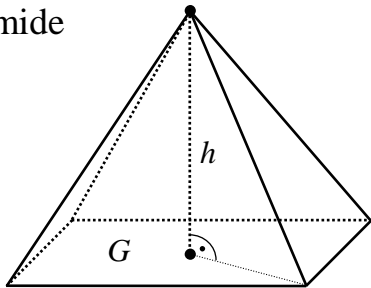
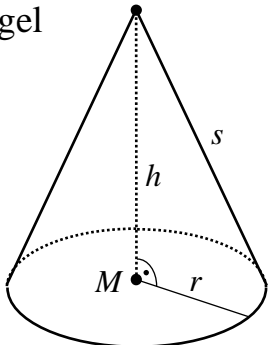
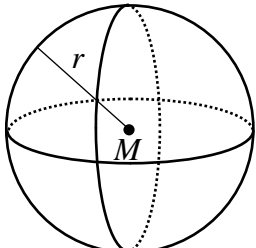
Sinus und Kosinus

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$

Ebene Figuren

Figur	Eigenschaft	Flächeninhalt
Dreieck 		$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$
Gleichschenkliges Dreieck 	Mindestens zwei Seiten sind gleich lang.	
Gleichseitiges Dreieck 	Alle Seiten sind gleich lang.	$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$
Parallelogramm 	Gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel.	$A = g \cdot h_g$
Raute 	Alle vier Seiten sind gleich lang.	$A = a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$
Trapez 	Mindestens zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$
Drachen 	Es gibt zwei Paare gleich langer Seiten.	$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$
Kreis 	Alle Punkte der Kreislinie besitzen vom Mittelpunkt denselben Abstand.	$A = \pi r^2$ $U = 2 \pi r$ (Umfang)

Räumliche Figuren

Figur	Volumen / Oberfläche
Prisma 	$V = G \cdot h$
Gerader Kreiszyylinder 	$V = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$ $M = 2\pi r \cdot h$ (Mantelfläche) $O = 2\pi r \cdot (h + r)$
Quader 	$V = a \cdot b \cdot c$ $e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (Raumdiagonale)
Gerade Pyramide 	$V = \frac{1}{3} G \cdot h$
Gerader Kreiskegel 	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$ $M = \pi r s$ (Mantelfläche)
Kugel 	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $O = 4\pi r^2$

Teil II: Analysis

Grenzwerte

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0^+$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^r \cdot e^x) = 0^\pm$ (Die e-Funkt. dominiert.)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0$ ($r > 0$)
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^r \cdot \ln(x)) = 0$ ($r > 0$) (Die Potenzfunkt. dominiert.)

Ableitungsregeln

- Ableitung: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (Falls der Grenzwert existiert und endl. ist.)
- Mittlere Änderungsrate von f über dem Intervall $[a; b]$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- Lokale (momentane) Änderungsrate von f an der Stelle a : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Ableitung der Grundfunktionen

- Potenzfunktion: $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$ ($r \in \mathbb{R}$)
- Sinusfunktion: $(\sin(x))' = \cos(x)$
- Kosinusfunktion: $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- e-Funktion: $(e^x)' = e^x$
- ln-Funktion: $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- Allg. Exponentialfunktion: $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$

Ableitungsregeln

- Summenregel: $h(x) = f(x) + g(x)$ $h'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Faktorregel: $h(x) = \alpha \cdot f(x)$ $h'(x) = \alpha \cdot f'(x)$
- Produktregel: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Quotientenregel: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
- Kettenregel: $h(x) = f(g(x))$ $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Anwendungen der Differenzialrechnung

- *Symmetrie* Achsensymmetrie zur y -Achse: $f(-x) = f(x)$ für alle x
 Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$ für alle x

- *Spiegelung* an der x -Achse: $y = -f(x)$
 an der y -Achse: $y = f(-x)$

- *Verschiebung* um c in x -Richtung: $y = f(x - c)$
 um d in y -Richtung: $y = f(x) + d$

- *Streckung* mit Faktor $\frac{1}{b}$ in x -Richtung: $y = f(b \cdot x)$
 mit Faktor a in y -Richtung: $y = a \cdot f(x)$

- *Tangente* Tangentensteigung: $m_T = f'(x_0)$
 Tangentengleichung: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

- *Normale* Normalensteigung: $m_N = -\frac{1}{f'(x_0)}$
 Normalengleichung: $y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

- *Monotonie* $f'(x) < 0$ im Intervall $I \Rightarrow f$ fällt streng monoton in I .
 $f'(x) > 0$ im Intervall $I \Rightarrow f$ wächst streng monoton in I .

- *Hochpunkt* $f'(x_0) = 0$
 und
 VZW „+ nach -“
 von f' bei x_0 \Rightarrow Hochpunkt $H(x_0 | f(x_0)) \Leftarrow$ $f'(x_0) = 0$
 und $f''(x_0) < 0$

- *Tiefpunkt* $f'(x_0) = 0$
 und
 VZW „- nach +“
 von f' bei x_0 \Rightarrow Tiefpunkt $T(x_0 | f(x_0)) \Leftarrow$ $f'(x_0) = 0$
 und $f''(x_0) > 0$

- *Wendepunkt* $f''(x_0) = 0$
 und
 VZW von f'' bei x_0 \Rightarrow Wendepunkt $W(x_0 | f(x_0)) \Leftarrow$ $f''(x_0) = 0$
 und $f'''(x_0) \neq 0$

- *Winkel* Steigungswinkel an einer Stelle x_0 : $\tan(\alpha) = f'(x_0)$
 Orthogonalität bei x_0 : $f(x_0) = g(x_0)$ und $f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$.

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Jede Integralfunktion einer über einem Intervall stetigen Funktion f ist eine Stammfunktion von f .

Ableitung der Integralfunktion: Für $I(x) = \int_a^x f(t) dt$ gilt $I'(x) = f(x)$.

Berechnung bestimmter Integrale

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Wichtige Stammfunktionen

Funktion f	Stammfunktion F	Funktion f	Stammfunktion F
$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1} \quad (r \neq -1)$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x $
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$

Besondere Integrale

- $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln|f(x)|]_a^b$ (Im Zähler steht die Ableitung des Nenners.)
- $\int_a^b f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = [e^{f(x)}]_a^b$ (Innere Ableitung tritt als Faktor auf.)
- $\int_a^b f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot [F(ax+b)]_a^b$ (Dabei ist F eine Stammfunktion von f .)

Uneigentliches Integral

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_a^z f(x) dx \quad (\text{Flächen, die ins Unendliche reichen})$$

Anwendung der Integralrechnung

- Rotationsvolumen um die x -Achse über $[a; b]$: $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$
- Mittelwert einer Funktion über $[a; b]$: $\bar{y} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$

Teil III: Vektorrechnung

Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^3

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Eigenschaften und Anwendungen des Skalarprodukts

- Zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$
- Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$

Vektorprodukt im \mathbb{R}^3

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften und Anwendungen des Vektorprodukts

- $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf \vec{a} und \vec{b}
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$
- Flächeninhalt A des Dreiecks ABC : $A = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$
- Volumen V der dreiseitigen Pyramide $ABCD$: $V = \frac{1}{6} \cdot \left| (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} \right|$

Mittelpunkt einer Strecke \overline{AB}

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}), \text{ wobei } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ die Ortsvektoren von } A \text{ und } B \text{ sind.}$$

Schwerpunkt S des Dreiecks ABC

$$\vec{s} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}), \text{ wobei } \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ die Ortsvektoren von } A, B \text{ und } C \text{ sind.}$$

Geraden im \mathbb{R}^3

- Parametergleichung von g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$

Ebenen im \mathbb{R}^3

- Parametergleichung von e : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$
- Normalengleichung von e : $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$
- Koordinatengleichung von e : $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - c = 0$

Kugel im \mathbb{R}^3

Kreis mit Kugel mit dem Mittelpunkt $M (m_1 | m_2 | m_3)$ und dem Radius r :

- Vektorgleichung: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$
- Koordinatengleichung: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

Schnittwinkel

- Gerade – Gerade: $\cos(\alpha) = \left| \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} \right|$
- Gerade – Ebene: $\sin(\alpha) = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} \right|$
- Ebene – Ebene: $\cos(\alpha) = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|$

Abstandsberechnungen

- Punkt – Punkt

$$d(P; Q) = |\vec{PQ}| = |\vec{q} - \vec{p}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

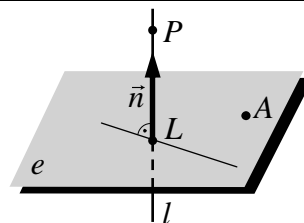
- Punkt – Ebene

Lotgeradenmethode

Gegeben:

Punkt P

Ebene $e: \vec{n} \cdot \vec{x} - c = 0$



Abstandsformel

$$d(P; e) = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot |\vec{n} \cdot \vec{AP}|$$

(A bel. Punkt von e)

- Punkt – Gerade

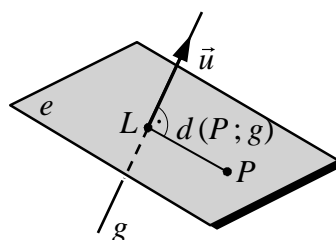
Lotebenenmethode

Gegeben:

Punkt P

Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$

Hilfsebene $e: \vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$



Abstandsformel

$$d(P; g) = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot |\vec{u} \times \vec{AP}|$$

Teil IV: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

- Regeln von de Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ und $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Zerlegungsregel: $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
- Gegenereignisregel: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Additionsregel: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge mit n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Unabhängigkeit von zwei Ereignissen

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Urnenmodell

- Ziehen ohne Zurücklegen
Aus einer Urne mit n Kugeln, von denen m schwarz sind, werden k Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

$$P(\text{„genau } l \text{ schwarze Kugeln“}) = \frac{\binom{m}{l} \cdot \binom{n-m}{k-l}}{\binom{n}{k}}$$

- Ziehen mit Zurücklegen
Aus einer Urne, in der der Anteil der schwarzen Kugeln p ist, werden n Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

$$P(\text{„genau } k \text{ schwarze Kugeln“}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Zufallsgröße - Binomialverteilung

Die Zufallsgröße X nehme die Werte x_1, x_2, \dots, x_n jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n an. Dann gilt:

- Erwartungswert

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$$

- Varianz

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E((X - \mu)^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i \\ &= (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$$

- Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

- Binomialverteilung

Ist die Zufallsgröße X binomialverteilt nach $B(n; p)$, so gilt:

$$\square P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\square \text{Erwartungswert: } E(X) = n \cdot p$$

$$\square \text{Varianz: } \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Das $1/\sqrt{n}$ - Gesetz

Sei p die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A sowie h_n die Zufallsgröße, welche die relative Häufigkeit des Eintretens von A in einer Serie von n Versuchen beschreibt, dann gilt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %:

$$|p - h_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Statistische Tests

Beim Testen einer Hypothese können folgende Fehler auftreten:

	H_0 ist wahr	H_0 ist falsch
H_0 wird verworfen	Fehler 1. Art	Richtige Entscheidung
H_0 wird nicht verworfen	Richtige Entscheidung	Fehler 2. Art

Als **Signifikanzniveau** α bezeichnet man den Wert, den die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art nicht überschreiten darf.

Arten von Signifikanztest

Testart	Nullhypothese H_0	Gegenhypothese H_1	Ablehnungsbereich
rechtsseitig	$p = p_0$	$p > p_0$	<p>$\bar{A} = \{k_r + 1; \dots; n\}$</p>
linksseitig	$p = p_0$	$p < p_0$	<p>$\bar{A} = \{0; 1; \dots; k_l - 1\}$</p>
beidseitig	$p \neq p_0$	$p = p_0$	<p>$\bar{A} = \{0; 1; \dots; k_l - 1\} \cup \{k_r + 1; \dots; n\}$</p>

σ -Umgebungen

68,3 % : einfache σ -Umgebung	$\mu \pm 1 \cdot \sigma$	90 % : Intervall	$\mu \pm 1,64 \cdot \sigma$
95,4 % : doppelte σ -Umgebung	$\mu \pm 2 \cdot \sigma$	95 % : Intervall	$\mu \pm 1,96 \cdot \sigma$
99,7 % : dreifache σ -Umgebung	$\mu \pm 3 \cdot \sigma$	98 % : Intervall	$\mu \pm 2,32 \cdot \sigma$
		99 % : Intervall	$\mu \pm 2,58 \cdot \sigma$

