7

# Die Satzgruppe des Pythagoras

*In Klassenstufe 7 haben wir uns bei den Inhalten zur Geometrie insbesondere mit Dreiecken und ihren Eigenschaften beschäftigt. In diesem Kapitel wirst du erkennen, dass es bei rechtwinkligen Dreiecken rechnerische Zusammenhänge zwischen bestimmenden Strecken gibt. Die neu gewonnenen Aussagen zu rechtwinkligen Dreiecken ermöglichen u.a. die Berechnung von Streckenlängen in ebenen Figuren und Körpern.*
*Zentrale Aussage in diesem Kapitel ist der* ***Satz des Pythagoras****, wohl einer der bekanntesten Sätze der Mathematik.*

## 7.1 Der Satz des Pythagoras

Bei einem rechtwinkligen Dreieck sind dir folgende Bezeichnungen bekannt (Bild 7.1): Die Seiten, die den rechten Winkel begrenzen, heißen **Katheten**, die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt **Hypotenuse** (Skript 7, Abschnitt 3.4)

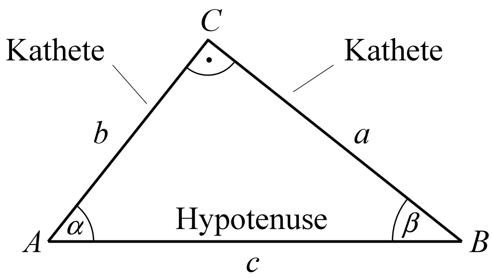


Bild 7.1

Für rechtwinklige Dreiecke liefern der Innenwinkelsatz und die Eigenschaft, dass in jedem Dreieck dem größeren Winkel die längere Seite gegenüber liegt, folgende Aussagen (Skript 7, Abschnitte 3.3 und 3.5):

> **Merke**
> In jedem rechtwinkligen Dreieck
> - sind die Winkel, die der Hypotenuse anliegen, spitze Winkel und die Summe ihrer Maße beträgt 90°,
> - ist die Hypotenuse die längste Seite.

Wir konstruieren ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen $a = 3\,\text{cm}$ und $b = 4\,\text{cm}$. Für die Länge der Hypotenuse messen wir $c \approx 5\,\text{cm}$ (Bild 7.2)[1].

Quadrieren wir die Maßzahlen der Kathetenlängen, so erhalten wir: $a^2 = 9$ und $b^2 = 16$.
Beim Vergleich mit dem Quadrat der Maßzahl der Hypotenusenlänge entdecken wir die Beziehung:

$$a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 \approx c^2 .$$

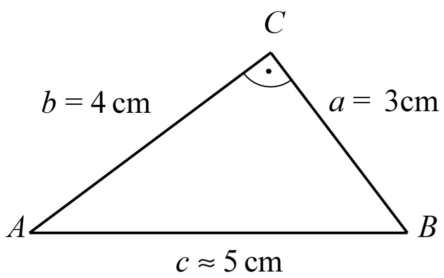


Bild 7.2

Zeichnen wir weitere rechtwinklige Dreiecke mit beliebigen Kathetenlängen $a$ und $b$ und messen die Hypotenusenlänge $c$, so bestätigt sich die Vermutung[2], dass für jedes dieser rechtwinkligen Dreiecke gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Es ergibt sich folgender Satz:

**Satz 7.1 (Der Satz des Pythagoras[3])**
Für jedes rechtwinklige Dreieck mit den Kathetenlängen $a$ und $b$ und der Hypotenusenlänge $c$ gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Oder auch:
In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat unter der Hypotenuse (Bild 7.3).

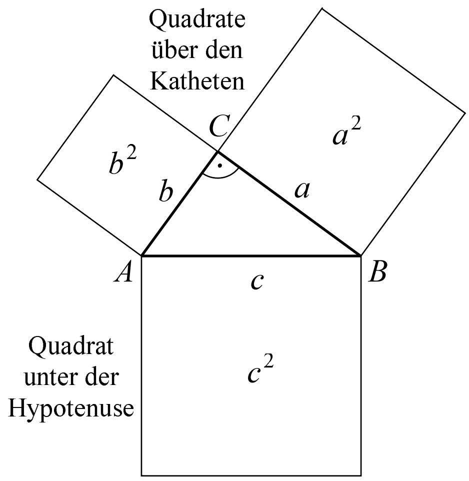


Bild 7.3

Zum Satz des Pythagoras sind über 100 unabhängige Beweise bekannt. Sie beruhen meistens auf dem Vergleich von Flächeninhalten.
Wir wollen zwei davon betrachten.

[1] Aus drucktechnischen Gründen stimmen die Maße in der Konstruktion nicht mit den angegebenen Maßen überein.
[2] Die Beziehung war schon den Babyloniern und den Ägyptern im Anfang des 2. Jahrtausends v. Chr. bekannt.
[3] Pythagoras von Samos (ca. 570-500 v.Chr.), griechischer Philosoph und Mathematiker

- 1. Beweis von Satz 7.1

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit dem Quadrat $\square AB'A'B$ unter der Hypotenuse.
Die Gerade $BC$ und die Senkrechte dazu durch $A'$ sowie die Gerade $AC$ und die Senkrechte dazu durch $B'$ erzeugen das Viereck $CDEF$ (Bild 7.4).
Da im Viereck alle Innenwinkel rechte Winkel sind (der Winkel $\sphericalangle A'EB'$ ist auch ein rechter Winkel, da die Geraden $BC$ und $DE$ sowie $AC$ und $EF$ parallel sind), ist das Viereck ein Rechteck.[1]

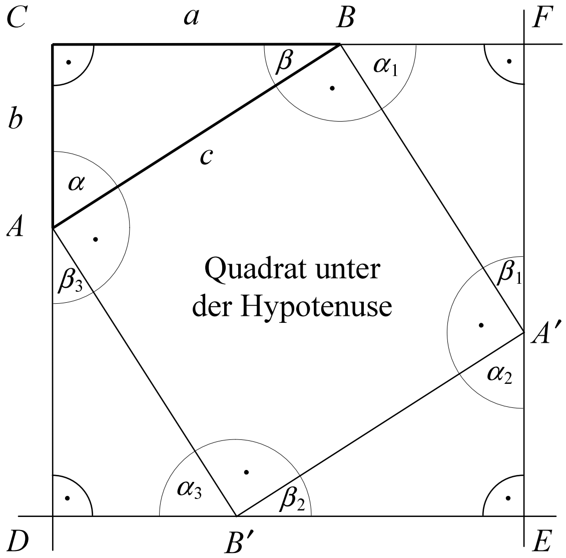

Bild 7.4

Wir betrachten nun im Rechteck $▭CDEF$ die vier Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle B'AD$, $\triangle A'B'E$ und $\triangle BA'F$.
Für sie gilt:
1) Die vier Dreiecke sind rechtwinklig.
2) $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AB'}\right| = \left|\overline{A'B'}\right| = \left|\overline{A'B}\right| = c$.
3) Mit 1) gilt: $\alpha = 90° - \beta = \alpha_1$; $\alpha_1 = 90° - \beta_1 = \alpha_2$; $\alpha_2 = 90° - \beta_2 = \alpha_3$.
   Insgesamt gilt: $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ und damit auch $\beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$.

Nach dem Kongruenzsatz WSW sind die vier Dreiecke somit kongruent.
Daraus folgt, dass alle vier Seiten des Rechtecks $▭CDEF$ gleich lang sind. Das Rechteck $▭CDEF$ ist somit ein Quadrat mit der Seitenlänge $a + b$.
Der Flächeninhalt $A$ des Quadrates $\square AB'A'B$ unter der Hypotenuse wird nun auf zwei Arten bestimmt:
Mit den Inhalten des Quadrates $\square CDEF$ und der vier kongruenten Dreiecke gilt:

$$A = (a+b)^2 - 4 \cdot \left(\tfrac{1}{2} a\, b\right) = a^2 + 2\,a\,b + b^2 - 2\,a\,b = a^2 + b^2.$$

Mit seiner Seitenlänge $c$ ergibt sich: $A = c^2$.
Zusammengefasst erhalten wir: $a^2 + b^2 = c^2$. $\square$

[1] Zur Erinnerung: Bezeichnungen für Strecken: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{AB}$ …
Bezeichnungen für Streckenlängen: $a$, $b$, $\left|\overline{AB}\right|$ …
Bezeichnungen für Winkel: $\sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle\beta$, $\sphericalangle ACB$ …
Bezeichnungen für Winkelmaße: $\alpha$, $\beta$, $\left|\sphericalangle ACB\right|$ … (Skript 6, Abschnitt 4.1)

- 2. Beweis von Satz 7.1

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$. Aus vier zum Dreieck $\triangle ABC$ kongruenten Dreiecken werden die Vierecke $DEFG$ und $HIJK$ gebildet (Bild 7.5).

Da im Viereck $DEFG$ alle Innenwinkel rechte Winkel sind (sie werden jeweils aus den beiden spitzen Winkeln des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ zusammengesetzt) und alle Seiten gleich lang sind, handelt es sich um ein Quadrat.

Da im Viereck $HIJK$ alle Innenwinkel rechte Winkel und alle Seiten gleich lang sind (die Seitenlänge ist gleich der Differenz $a-b$ der Kathetenlängen des Dreiecks $\triangle ABC$), handelt es sich ebenfalls um ein Quadrat.

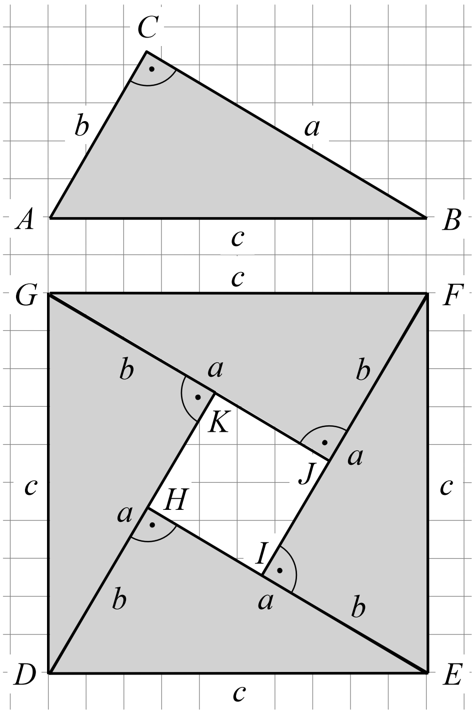

Bild 7.5

Der Flächeninhalt des Quadrates $\square DEFG$ lässt sich nun auf zwei Arten berechnen:

- Mit den Inhalten des Quadrates $\square HIJK$ und der 4 kongruenten Dreiecke gilt:

  $A=(a-b)^2+4\cdot\left(\frac{1}{2}ab\right)=a^2-2ab+b^2+2ab=a^2+b^2$.

- Mit seiner Seitenlänge $c$ ergibt sich:

  $A=c^2$.

Zusammen erhalten wir: $a^2+b^2=c^2$. $\square$

Mit dem Satz des Pythagoras lassen sich in rechtwinkligen Dreiecken aus zwei Seitenlängen die dritte berechnen.

**Beispiel 1 (Satz des Pythagoras anwenden)**

Das Dreieck in Bild 7.6 ist rechtwinklig und seine Kathetenlängen sind mit $5\text{ cm}$ und $7\text{ cm}$ angegeben.

Die fehlende Hypotenusenlänge $x$ können wir mit dem Satz des Pythagoras berechnen.

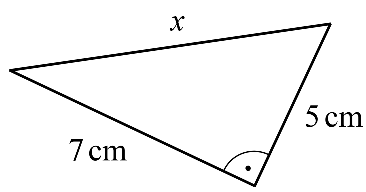

Bild 7.6

Es gilt: $x^2=(5\text{ cm})^2+(7\text{ cm})^2=74\text{ cm}^2$.

Da $x>0$ ist, hat die Gleichung nur eine Lösung: $x=\sqrt{74\text{ cm}^2}\approx 8{,}6\text{ cm}$.

Die Hypotenuse ist etwa $8{,}6\text{ cm}$ lang.

**Beispiel 2 (Satz des Pythagoras anwenden)**

Das Dreieck in Bild 7.7 ist rechtwinklig und seine Hypotenusenlänge ist mit 9 cm und eine Kathetenlänge mit 6 cm angegeben.

Die fehlende Länge $y$ der anderen Kathete berechnen wir mit dem Satz des Pythagoras.

Es gilt: $y^2 + (6\text{ cm})^2 = (9\text{ cm})^2$.

Wir lösen die Gleichung nach $y$ auf und erhalten:

$y^2 = (9\text{ cm})^2 - (6\text{ cm})^2 = 45\text{ cm}^2$.

Da $y > 0$ ist, hat die Gleichung nur eine Lösung:

$y = \sqrt{45}\text{ cm} = \sqrt{9 \cdot 5}\text{ cm} = 3 \cdot \sqrt{5}\text{ cm} \approx 6{,}7\text{ cm}$.

Die andere Kathete ist etwa 6,7 cm lang.

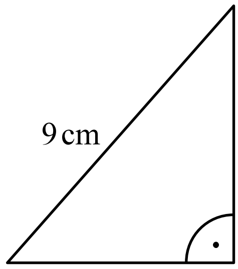


Bild 7.7

**Beispiel 3 (Quadrat-Spirale)**

Betrachte die Quadrat-Spirale in Bild 7.8.

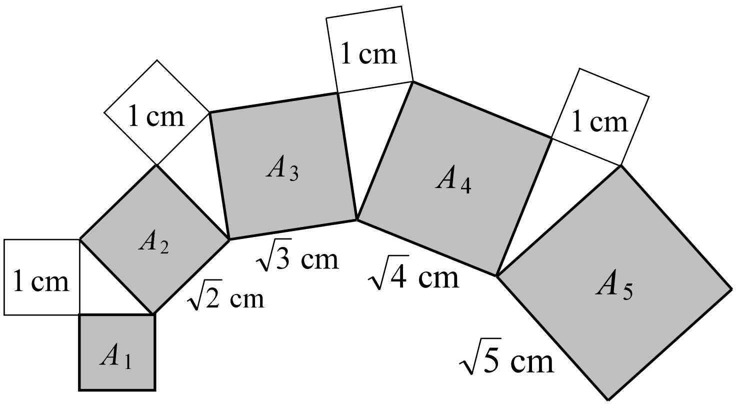


Bild 7.8

Die Figur zeigt, wie man mithilfe von Einheitsquadraten, also Quadraten mit der Seitenlänge 1 cm und dem Inhalt $A_1 = 1\text{ cm}^2$, nacheinander Quadrate mit den Inhalten $2\text{ cm}^2$, $3\text{ cm}^2$, $4\text{ cm}^2$, ... konstruieren kann.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt für den Inhalt:

- $A_2$ des 2. grauen Quadrats: $A_2 = A_1 + A_1 = 1\text{ cm}^2 + 1\text{ cm}^2 = 2\text{ cm}^2$
- $A_3$ des 3. grauen Quadrats: $A_3 = A_1 + A_2 = 1\text{ cm}^2 + 2\text{ cm}^2 = 3\text{ cm}^2$
- $A_4$ des 4. grauen Quadrats: $A_4 = A_1 + A_3 = 1\text{ cm}^2 + 3\text{ cm}^2 = 4\text{ cm}^2$ usw.

Die Seitenlängen der Quadrate betragen demnach $\sqrt{2}\text{ cm}$, $\sqrt{3}\text{ cm}$, $\sqrt{4}\text{ cm}$, ...