3

Parabeln und quadratische Gleichungen

In Klasse 7 hast du schon Geraden und Hyperbeln als Funktionsgraphen kennen gelernt. Jetzt lernst du eine weitere Kurve kennen, und zwar die ***Parabel****, zunächst aber nicht als Funktionsgraph, sondern als geometrische Darstellung der Lösungsmenge von Gleichungen.*
Bei den Gleichungen, die du bisher gelöst hast, kam die Lösungsvariable x nur in der ersten Potenz vor. In diesem Kapitel lernst du Gleichungen zu lösen, bei denen x in der zweiten Potenz vorkommt, so genannte ***quadratische Gleichungen****.*

3.1 Die Gleichung $y = ax^2$

3.1.1 Die Normalparabel

Schon in Klassenstufe 8 haben wir Gleichungen mit zwei Variablen kennen gelernt (Skript Klasse 8, Abschnitt 3.1.2). Wir haben dort lineare Gleichungen mit zwei Variablen behandelt. Dazu betrachten wir zunächst ein Beispiel. Da wir mittlerweile die reellen Zahlen eingeführt haben, führen wir die Betrachtung über der Grundmenge $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ durch.

Beispiel (Lineare Gleichung mit zwei Variablen)
Gegeben ist die lineare Gleichung $3x - y = 1$.
Lösungen der Gleichung sind Zahlenpaare aus der Grundmenge $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x \mid y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R} \}$.
Das Zahlenpaar $(1 \mid 2)$ ist eine Lösung der Gleichung, denn setzen wir 1 für x und 2 für y in die Gleichung ein, so erhalten wir die wahre Aussage $3 \cdot \mathbf{1} - \mathbf{2} = 1$.
Das Zahlenpaar $(-3 \mid 0)$ ist keine Lösung der Gleichung, denn nach dem Einsetzen erhalten wir die falsche Aussage $3 \cdot (\mathbf{-3}) - \mathbf{0} = 1$.
Um weitere Lösungen leichter angeben zu können, lösen wir zunächst die Gleichung nach y auf: $3x - y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = 3x - 1$.

Setzen wir nun in die letzte Gleichung für x beliebige reelle Zahlen ein, erhalten wir unendlich viele weitere Lösungen:
0 für x eingesetzt, ergibt $y = 3 \cdot \mathbf{0} - 1 = -1$.
Also ist $(0|-1)$ eine Lösung.
$\frac{1}{3}$ für x eingesetzt, ergibt $y = 3 \cdot \mathbf{\frac{1}{3}} - 1 = 0$.
Also ist $(\frac{1}{3}|0)$ eine Lösung usw.
Die Gesamtheit aller Lösungen geben wir in der beschreibenden Darstellung an:
$L = \{(x|y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y = 3x - 1\}$.
Die Lösungen der Gleichung $3x - y = 1$ können als Punkte in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Die Menge dieser Punkte heißt Graph oder Schaubild der Gleichung.

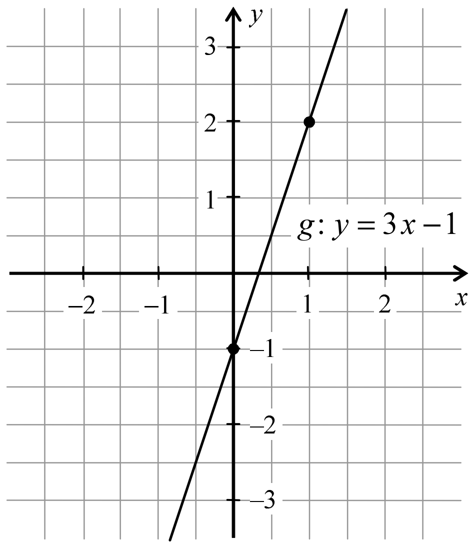

Bild 3.1

Da die Umformung $3x - y = 1 \Leftrightarrow y = 3x - 1$ gilt, wissen wir aus Klasse 8 (Skript Klasse 8, Abschnitt 3.4), dass der Graph der gegebenen Gleichung die Gerade g mit der Steigung 3 und dem y-Achsenabschnitt -1 ist (Bild 3.1).

Wir betrachten jetzt die Gleichung $y = x^2$ über der Grundmenge $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Die Gleichung enthält zwei Variablen, wobei die Variable x in der zweiten Potenz vorkommt. Es handelt sich also nicht um eine lineare Gleichung.
Mithilfe einer Wertetabelle zu $y = x^2$ erhalten wir Lösungen der Gleichung.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x^2	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Wir lesen aus der Wertetabelle z.B. folgende Zahlenpaare als Lösungen ab:
$(-3|9)$, $(-2{,}5|6{,}25)$, $(-2|4)$ usw.
Die zugehörigen Punkte tragen wir in ein Koordinatensystem ein (Bild 3.2).
Es zeigt sich, dass diese Punkte nicht auf einer Geraden liegen.
Die zeichnerische Darstellung weiterer Lösungen liefert weitere Punkte. Man sieht, dass alle Punkte auf einer gekrümmten Linie liegen. Da die Lösungsmenge unendlich viele Zahlenpaare enthält, können wir dieses Verfahren beliebig lange fortsetzen, bis sich die Punkte zum Graphen der Gleichung $y = x^2$ verdichten (Bild 3.2).
Wir erhalten eine Kurve, die symmetrisch zur y-Achse ist. Sie berührt die x-Achse im Ursprung und verläuft sonst vollständig oberhalb der x-Achse.

Man nennt diese Kurve eine **Parabel**[1]. Der tiefste Punkt dieser Parabel ist der **Scheitelpunkt *S*** oder kurz der **Scheitel** dieser Parabel; er liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Die y-Achse ist die Symmetrieachse der Parabel.
Im Unterschied zu anderen Parabeln, die wir in den folgenden Abschnitten noch behandeln werden, nennt man den Graph von $y = x^2$ **Normalparabel**.

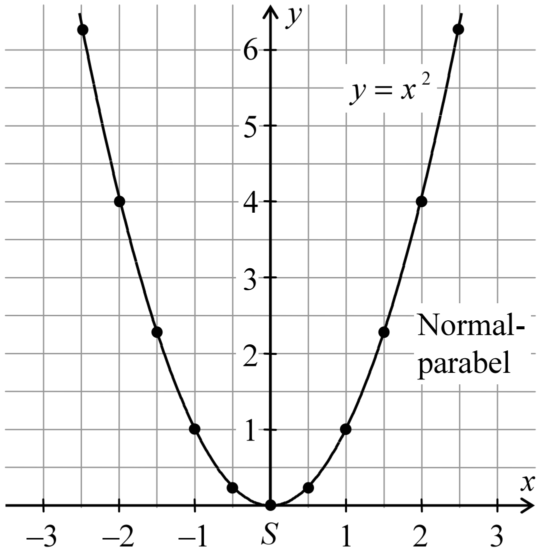

Bild 3.2

Merke (Normalparabel)
Der Graph der Gleichung $y = x^2$ ist eine Kurve. Sie heißt **Normalparabel** mit dem **Scheitelpunkt** $S(0 \mid 0)$.

Wir betrachten nun noch die Gleichung $y = -x^2$ über der Grundmenge $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Mithilfe einer Wertetabelle zu $y = -x^2$ erhalten wir Lösungen der Gleichung.

x	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$-x^2$	−6,25	−4	−2,25	−1	−0,25	0	−0,25	−1	−2,25	−4	−6,25

Der zugehörige Graph ist ebenfalls eine Parabel (Bild 3.3).
Sie ist das Spiegelbild der Normalparabel bezüglich der x-Achse.

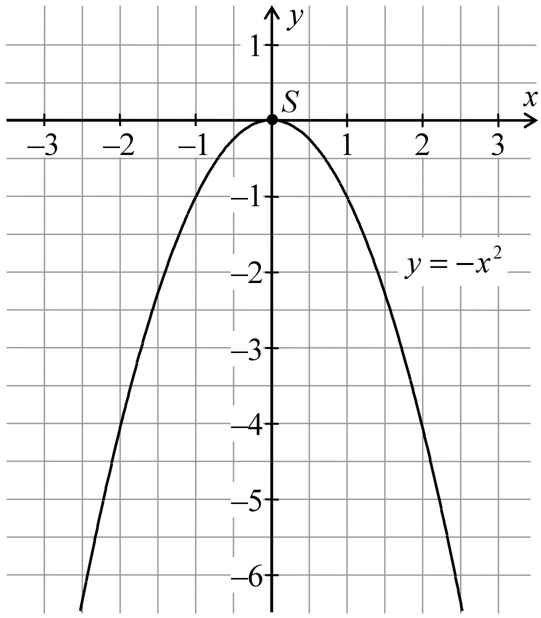

Bild 3.3

[1] paraballein (griech.), gleich setzen

3.1.2 Weitere Parabeln

Wir betrachten die Gleichungen $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -\frac{1}{3}x^2$ und $y = -3x^2$. Sie haben alle die Form $y = a\,x^2$. Die Variable $a \in \mathbb{R}$ heißt **Parameter**[1]. Jeder Wert von a liefert eine andere Gleichung.
Mit einer Wertetabelle (auf zwei Nachkommastellen gerundet) erhalten wir die Graphen zu den obigen Gleichungen (Bild 3.4).

x	0	±0,5	±1,0	±1,5	±2,0	±2,5	±3,0
$y = 2x^2$	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18
$y = \frac{1}{2}x^2$	0	0,13	0,5	1,13	2	3,13	4,5
$y = -\frac{1}{3}x^2$	0	–0,08	–0,33	–0,75	–1,33	–2,08	–3
$y = -3x^2$	0	–0,75	–3	–6,75	–12	–18,75	–27

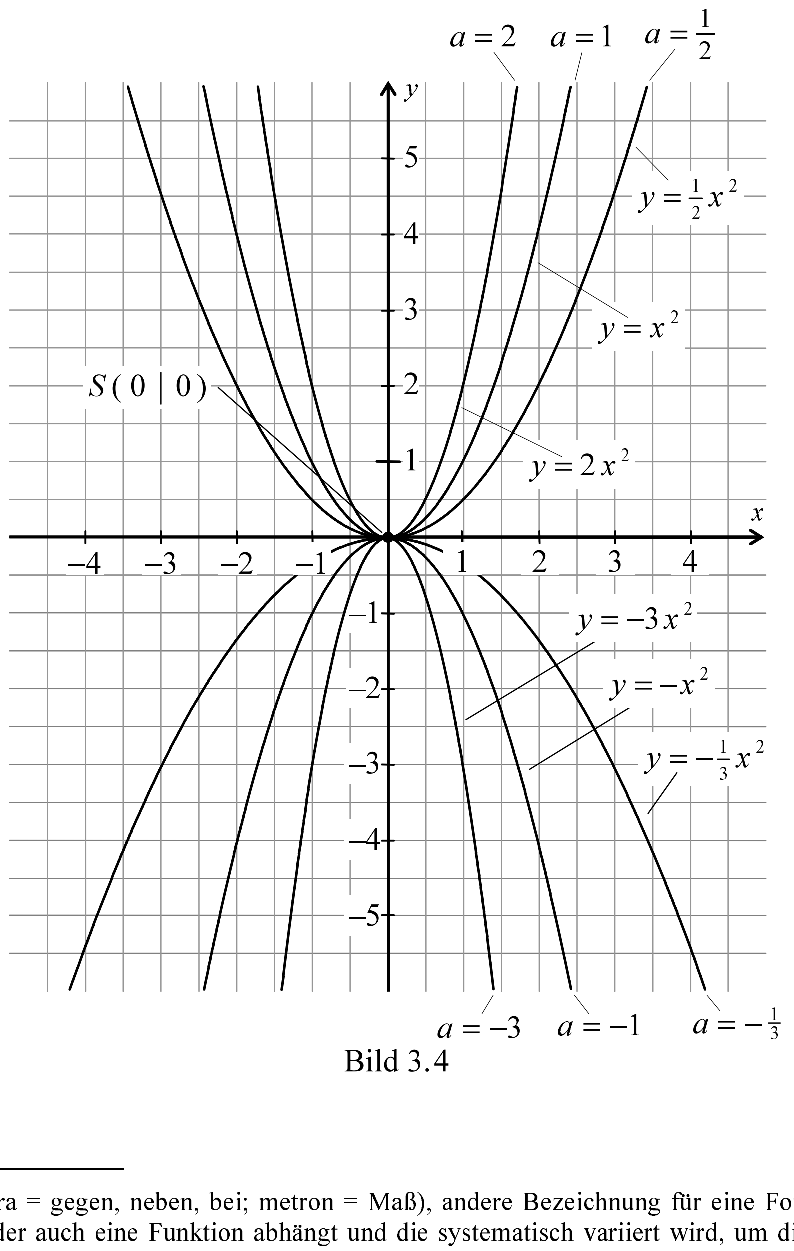

Bild 3.4

[1] Parameter (griech. para = gegen, neben, bei; metron = Maß), andere Bezeichnung für eine Formvariable, von der eine Gleichung oder auch eine Funktion abhängt und die systematisch variiert wird, um die Abhängigkeit von ihr zu erkennen. Rein formal sind eine Variable und ein Parameter nicht zu unterscheiden, die Unterscheidung geschieht lediglich problembezogen.

Wir erkennen:
Der Graph der Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ entsteht aus der Normalparabel, indem man bei allen Punkten des Graphen die y-Koordinaten verdoppelt, also die Normalparabel mit dem Streckfaktor 2 in y-Richtung streckt.
Der Graph der Parabel mit der Gleichung $y = -\frac{1}{3}x^2$ ergibt sich aus der Normalparabel, indem man bei allen Punkten des Graphen die y-Koordinaten mit $-\frac{1}{3}$ multipliziert, also die Normalparabel mit dem Faktor $-\frac{1}{3}$ in y-Richtung streckt. Dies bedeutet, dass man zuerst mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ in y-Richtung streckt und dann das Ergebnis an der x-Achse spiegelt.

Allgemein gilt:

Definition 3.1 (Parabeln)
Die Graphen der Gleichungen $y = a\,x^2$ mit $a \neq 0$ heißen **Parabeln**. Sie entstehen aus der Normalparabel durch Streckung um den Streckfaktor a in y-Richtung. Sie sind symmetrisch zur y-Achse.
Statt Graph von $y = a\,x^2$ sagen wir auch Parabel **mit der Gleichung $\boldsymbol{y = a\,x^2}$**.

Für die Parabeln mit der Gleichung $y = a\,x^2$ gilt:

für $a > 0$

- sie sind nach oben geöffnet,
- ihr tiefster Punkt ist der Scheitel $S(0 \mid 0)$,
- für $a > 1$ ist die Parabel enger geöffnet als die Normalparabel,
- für $0 < a < 1$ ist die Parabel weiter geöffnet als die Normalparabel.

für $a < 0$

- sie sind nach unten geöffnet,
- ihr höchster Punkt ist der Scheitel $S(0 \mid 0)$,
- für $a < -1$ ist die Parabel enger geöffnet als die Normalparabel,
- für $-1 < a < 0$ ist die Parabel weiter geöffnet als die Normalparabel.