4.2 Steigung von Funktionsgraphen an einer Stelle x_0 ihrer Definitionsmenge

Wie wir im Abschnitt 4.1 gesehen haben, ist die Steigung einer Geraden überall gleich. Bei gekrümmten Graphen dagegen kann man zunächst nicht von einer Steigung sprechen.

Um das Steigungsverhalten eines gekrümmten Funktionsgraphen wenigstens grob zu beschreiben, können wir ihn durch einen Sehnenzug annähern (Bild 4.10).

Durch eine Reihe von Kurvenpunkten
$P_0(x_0 \mid f(x_0))$, $P_1(x_1 \mid f(x_1))$,
$P_2(x_2 \mid f(x_2))$, …
entstehen Steigungsdreiecke $P_0Q_1P_1$, $P_1Q_2P_2$, $P_2P_3Q_3$, …

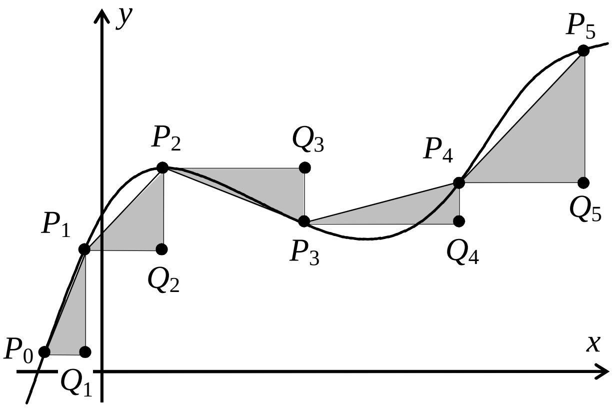

Bild 4.10

In den Steigungsdreiecken kann man die Steigungen der Sekanten P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, … berechnen.

Einem Abschnitt des Graphen kann dann als Steigung **näherungsweise** die Steigung der zugehörigen Sekante zugeordnet werden.

Man definiert:

Definition 4.2 (Mittlere Steigung)
Ist die Funktion f auf dem Intervall $[a\,;b]$ definiert, so heißt die Steigung der Sekanten AB, also die Zahl $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ **mittlere Steigung** des Graphen von f im Intervall $[a\,;b]$.

Der Quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ heißt **Differenzenquotient zwischen *a* und *b*.**

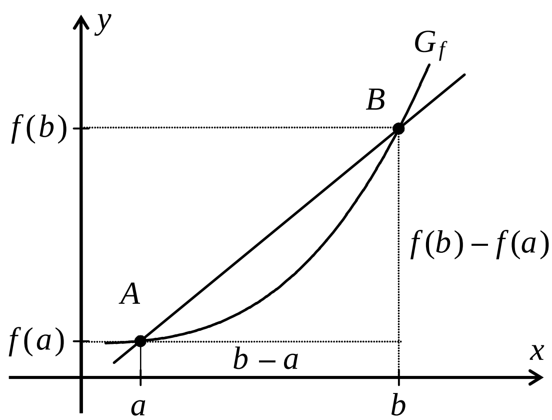

Bild 4.11

Die mittleren Steigungen (Bild 4.10 und 4.11) vermitteln nur ein grobes Bild von dem Verhalten der Kurve. Die Annäherung wird aber bei wachsender Zahl der Teilpunkte immer besser. Man kann dann die Steigung des Graphen immer genauer durch die Steigungen der Sekanten beschreiben.

Dies führt schließlich zu folgender zentralen Fragestellung:
Wie kann man dem Graphen von f in einem Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$ eine Steigung zuordnen?

Es bietet sich an, diese Fragestellung auf eine Gerade zurückzuführen und dem Graphen als Steigung im Punkt P_0 die Steigung der Tangente an den Graphen in diesem Punkt P_0 zuzuordnen.

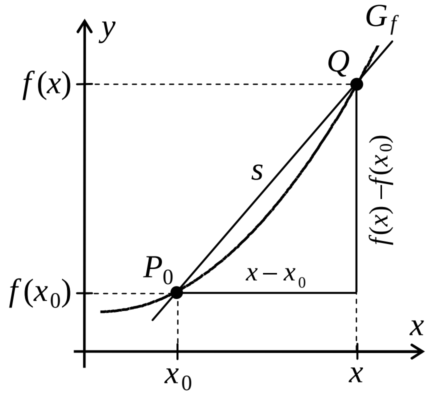

Bild 4.12 a

Um diese Tangentensteigung zu berechnen, wählt man auf G_f einen von P_0 verschiedenen Punkt $Q(x \mid f(x))$. Es spielt keine Rolle, ob Q links oder rechts von P_0 liegt.
Die Sekante s durch P_0 und Q hat die Steigung $m_s = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (Bild 4.12 a).

Bewegt sich nun der Punkt Q auf G_f immer mehr auf den Punkt P_0 zu, d.h. strebt x gegen x_0, so dreht sich die Sekante um P_0 und geht schließlich in die Tangente t in P_0 über (Bild 4.12 b) und die Sekantensteigung m_s geht in die Tangentensteigung m_t über.

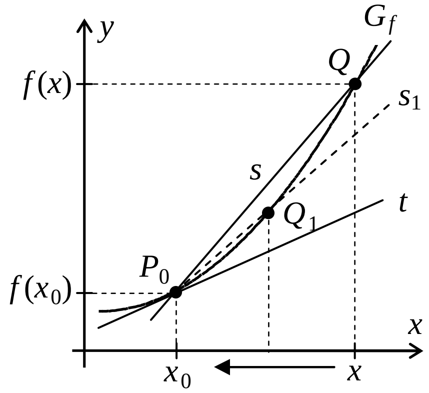

Bild 4.12 b

Allgemein definiert man:

Definition 4.3 (Steigung eines Funktionsgraphen an der Stelle x_0)

Falls der Grenzwert der mittleren Steigung $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für x gegen x_0 existiert, so heißt dieser Grenzwert **Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0** und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

$f'(x_0)$ gibt auch die **Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$** an.
$f'(x_0)$ heißt auch **Ableitung von f an der Stelle x_0**.

Bemerkungen

1. Der Grenzübergang x gegen x_0 bedeutet: x kommt der Stelle x_0 beliebig nahe, ohne sie jedoch jemals zu erreichen. Es ist also stets $x \neq x_0$, was bei der Berechnung von Steigungen zu beachten ist.
2. Es kann bei einem Funktionsgraphen vorkommen, dass es Stellen gibt, an denen der Grenzwert nicht existiert. Dem Graphen kann dann an diesen Stellen keine Steigung zugeordnet werden (siehe Seite 127, Beispiel 1).

Beispiel (Berechnung der Steigung an einer Stelle x_0 der Definitionsmenge)

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{1}{4}x^2$. Wir berechnen die Steigung von G_f an der Stelle 1 mithilfe der Definition 4.3.

Dabei gehen wir in zwei Schritten vor:

- Schritt 1
  Wir berechnen den Differenzenquotienten an der Stelle 1 und vereinfachen ihn so weit wie möglich:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}}{x-1} = \frac{\frac{1}{4}\cdot(x^2-1)}{x-1} = \frac{\frac{1}{4}\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{x-1} \underset{x\neq 1}{=} \frac{1}{4}\cdot(x+1).$$

  Hinweis: Der Faktor $(x-1)$ ist wegen $x \neq 1$ stets von null verschieden und kann daher gekürzt werden.

- Schritt 2

  Wir bilden den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{4}\cdot(x+1) = \frac{1}{2}.$$

  Die Steigung des Graphen von f an der Stelle 1 ist $\frac{1}{2}$. Somit gilt $f'(1) = \frac{1}{2}$.