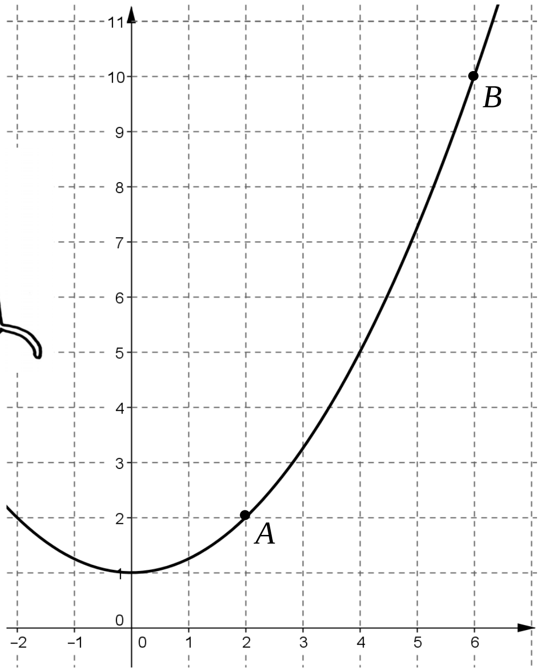
Steigung von Funktionsgraphen

6. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 1 + \frac{1}{4}x^2$.



Der Graph ist nicht – wie eine Gerade – überall gleich steil. Er wird z. B. zwischen den Punkten A und B immer steiler.

Wir ordnen dem Kurvenstück zwischen A und B die Steigung der Geraden AB als **mittlere Steigung** zu.

a) Zeichne die Gerade AB und berechne die mittlere Steigung des Graphen von f zwischen A und B (im Intervall $[2;6]$).

b) Berechne die mittlere Steigung des Graphen von f im Intervall $[0;4]$.

c) Finde ein Intervall, in dem die mittlere Steigung von G_f null ist.

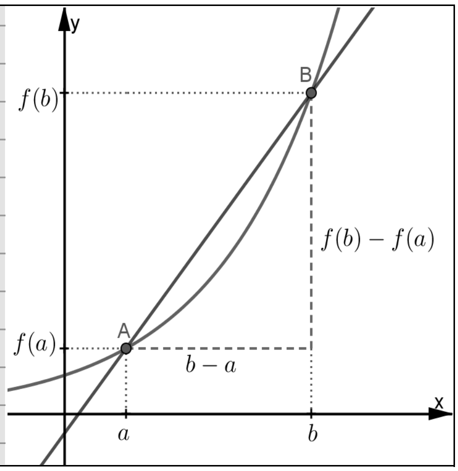
d) Ergänze.

In nebenstehender Abbildung gilt:

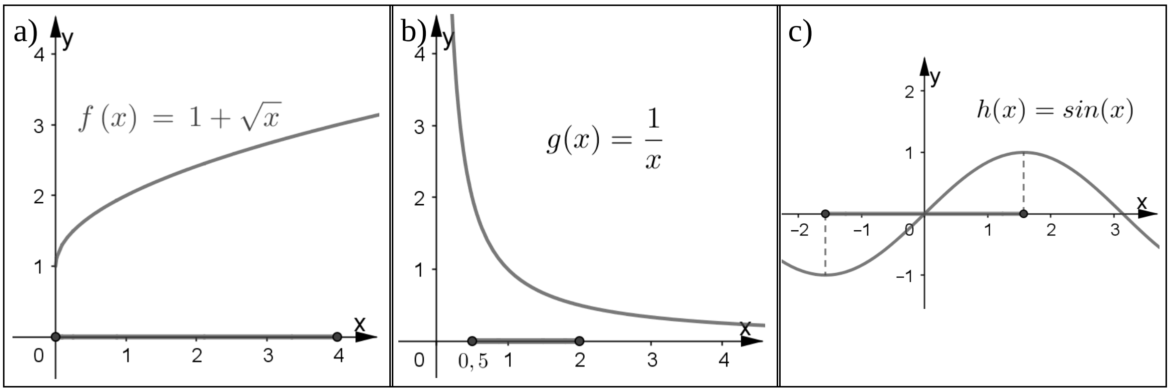
Die Steigung der Sekante AB, also die Zahl

heißt **mittlere Steigung** des Graphen von f

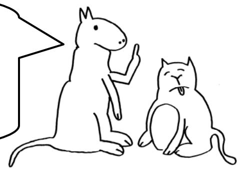
im Intervall $[a;b]$.



7. Gegeben sind der Graph einer Funktion f und ein Intervall $[a;b]$.
Berechne die mittlere Steigung von G_f in $[a;b]$.



8. Wir lernen am Beispiel der Quadratfunktion $f: x \mapsto x^2$, wie man die **Steigung** eines Funktionsgraphen **an einer Stelle** definiert; in Aufgabe 8 händisch, in Aufgabe 9 mit GeoGebra.

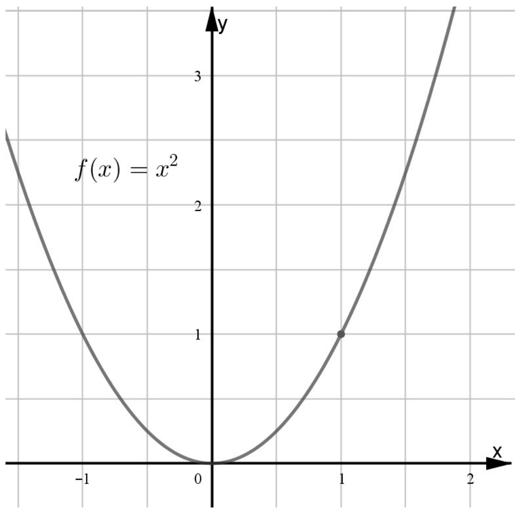


a) Zeige, dass der Graph der Quadratfunktion in den Intervallen $[x;1]$ und $[1;x]$ die mittlere Steigung $1+x$ hat.

b) Berechne die mittlere Steigung des Graphen von f in den angegebenen Intervallen.

Intervall	[0;1]	[0,5;1]	[0,9;1]	[0,99;1]	[0,999;1]
mittlere Steigung					

Intervall	[1;2]	[1;1,5]	[1;1,1]	[1;1,01]	[1;1,001]
mittlere Steigung					



c) Wie verhält sich die mittlere Steigung in b), wenn sich die Intervalle auf die Stelle 1 zusammenziehen?

d) Du möchtest dem Graphen von f an der Stelle 1 eine Steigung – wir bezeichnen sie mit $f'(1)$ – zuordnen.

Welche Festlegung ist sinnvoll?

$f'(1) =$

e) Prüfe anhand der Abbildung, ob deine Festlegung mit der Anschauung in Einklang steht.

f) Ordne dem Graphen von f an der Stelle 0 eine Steigung zu.

Überprüfe deine Festlegung, indem du die mittlere Steigung von G_f in auf die Stelle 0 sich zusammenziehenden Intervallen berechnest.

g) Welche Steigung sollte der Graph aus geometrischen Gründen an der Stelle -1 haben?

9. a) Erstelle das unten abgebildete GeoGebra-Arbeitsblatt.

① Zeichne den Graphen von $f(x)=x^2$.

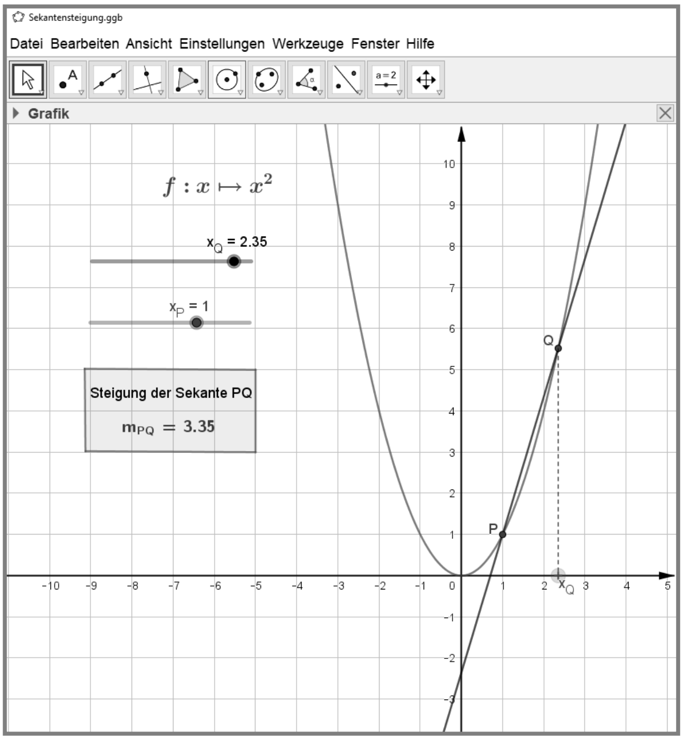
② Erstelle einen Schieberegler für die Zahl x_P (geschrieben x_P): min $=-3$, max $=3$, Schrittweite 0.1

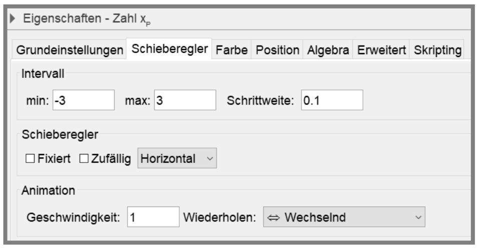
③ Erstelle einen Schieberegler für die Zahl x_Q:
min $=-3$, max $=3$, Schrittweite 0.01

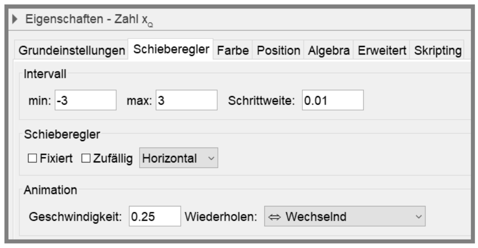
④ Zeichne die Punkte P=(x_P,f(x_P)) und Q=(x_Q,f(x_Q)) sowie die Sekante PQ.

⑤ Gib zur Berechnung der Sekantensteigung m_{PQ} (geschrieben m_{PQ}) ein: m_PQ = (f(x_P) - f(x_Q))/(x_P - x_Q))

⑥ Du kannst noch das Layout des Arbeitsblattes gestalten (Text, Rahmen, Farbe, …).

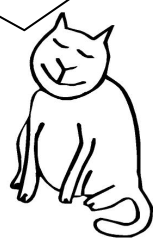






Das fertige Arbeitsblatt gibt es auch als ggb-Datei auf der Webseite des Softfrutti-Verlags.

b) Wähle $x_P=1$. Verändere mit dem x_Q-Schieberegler die Lage von Q auf dem Graphen; am besten schaltest du im Kontextmenü des Schiebereglers die Animation ein (Geschwindigkeit = 0,25).



- Wie verhalten sich die Sekante PQ und ihre Steigung, wenn sich das Intervall $[1; x_Q]$ bzw. $[x_Q; 1]$ auf die Stelle 1 zusammenzieht?
- Du möchtest dem Graphen von f an der Stelle 1 eine Steigung – wir bezeichnen sie mit $f'(1)$ – zuordnen.
  Welche Festlegung ist sinnvoll?

$f'(1) =$

c) Stelle Vermutungen über die Steigung des Graphen an den Stellen 0, -1 und $\frac{1}{2}$ auf.

$f'(0) =$ $f'(-1) =$ $f'(\frac{1}{2}) =$

Überprüfe deine Vermutungen mit dem GeoGebra-Arbeitsblatt.

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.

Die **Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0** ist wie folgt definiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

10. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.

a) Wurzel berechnet mit Hilfe der Definition die **Steigung des Graphen von f an der Stelle 5**. Erkläre ihre Rechenschritte.

$$\frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \frac{x^2-25}{x-5}$$

$$= \frac{(x-5)\cdot(x+5)}{x-5}$$

$$= x+5 \xrightarrow[x \to 5]{} 10$$

Ergebnis: $f'(5) = 10$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}$$

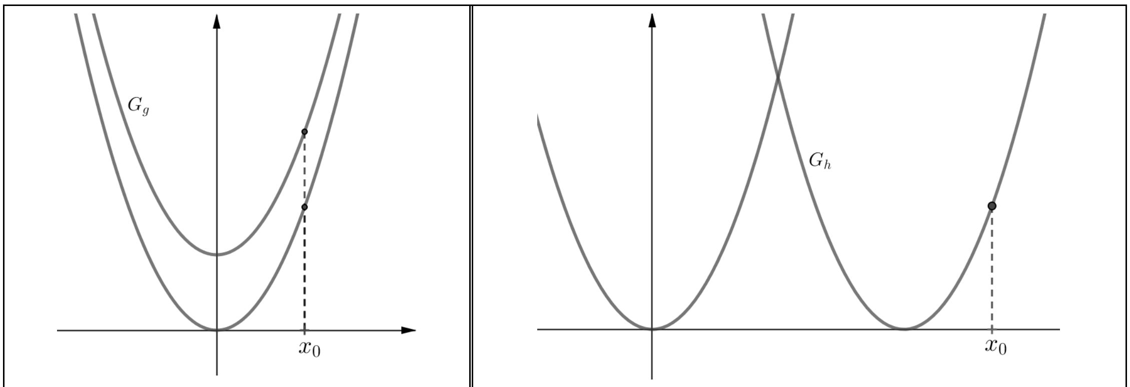
$$=$$

b) Silvester will die **Steigung von G_f an einer beliebigen Stelle x_0** berechnen und hat den ersten Rechenschritt schon aufgeschrieben. Führe die Rechnung zu Ende.

c) • Welche Steigung hat G_f an der Stelle 3?

• An welcher Stelle hat G_f die Steigung 3?

d) Die Abbildung unten links zeigt neben G_f auch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$. Gib $g'(x_0)$ an.



$g'(x_0) =$

$h'(x_0) =$

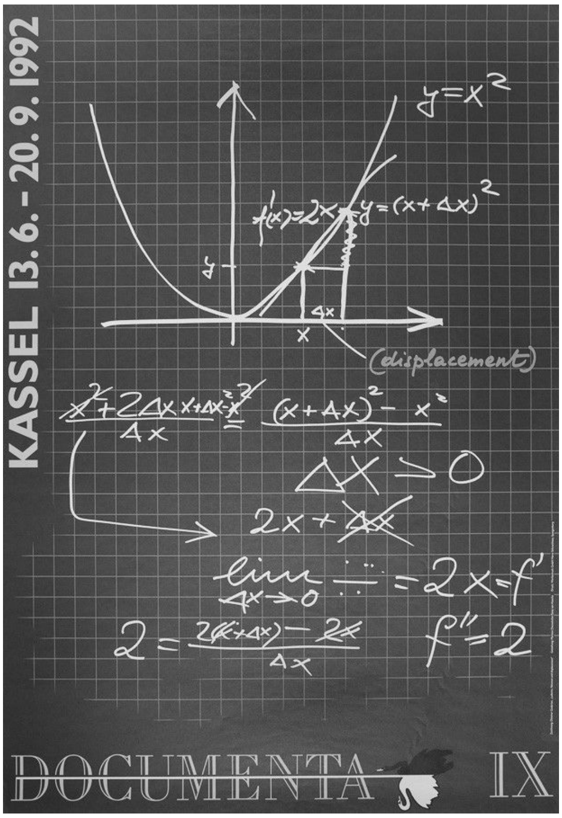
e) Die Abbildung oben rechts zeigt neben G_f auch den Graphen der Funktion h mit $h(x) = (x-c)^2,\ c \in \mathbb{R}$. Gib $h'(x_0)$ an.

11. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = a + b\,x$ ist eine Gerade. Berechne die Steigung der Geraden an einer beliebigen Stelle x_0 mit Hilfe der neuen Steigungsdefinition.

12. Mathematik in der Kunst

Die Abbildung zeigt ein Plakat zur 9. Documenta in Kassel. Die Documenta ist die weltweit bedeutendste Reihe von Ausstellungen für zeitgenössische Kunst und findet alle fünf Jahre statt.

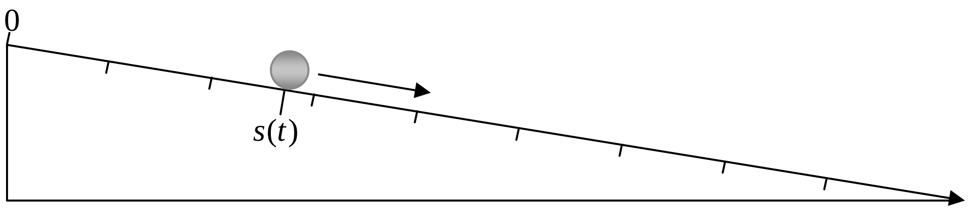
Erkläre, was auf dem Plakat dargestellt ist.



Geschwindigkeit

13. Geschwindigkeit

Eine Kugel rollt aus der Ruhe heraus eine geneigte Schiene hinab. Mit $s(t)$ bezeichnen wir den Ort der Kugel zum Zeitpunkt t.



Messungen haben folgendes **Weg-Zeit-Gesetz** ergeben: $s(t) = 0{,}08\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$.

a) Berechne die Orte der Kugel zu den angegebenen Zeitpunkten.

t (in s)	0	1	2	3	4	5	6	7
s (in m)								

b) Begründe, dass die Kugel sich immer schneller bewegt.