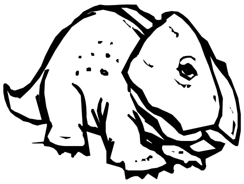
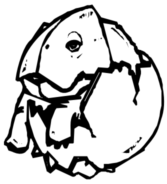
1.10 Das Zweiersystem (Dualsystem)

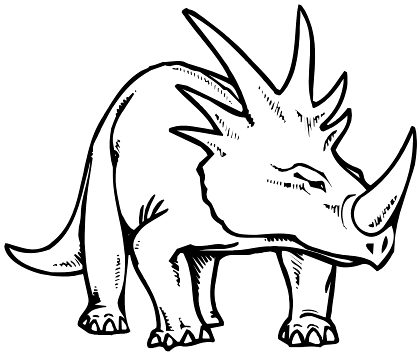
Im Dinoland

Alle reden von den Dinos. Doch kaum jemand weiß, dass die Dinos auch rechnen konnten. Sie benutzten jedoch nicht wie wir Menschen das Dezimalsystem, sondern sie rechneten in einem eigenen Dinosystem. Was das nun ist und wie das funktioniert, siehst du aber später.

Zuerst schauen wir uns mal Papa Styracasaurus, Rufname „Spike", an. Ist er nicht prächtig? Er war der Vater von den beiden Protoceratops-Zwillingen Proci und Proto.

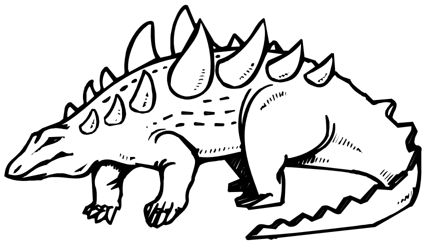




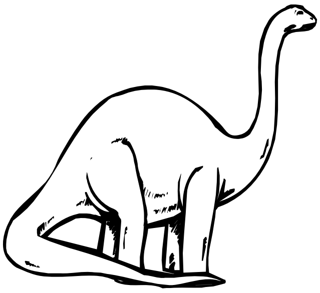


Diese gingen wie die Menschenkinder in die Schule, und zwar auf das Ankylosaurus-Gymnasium mitten im Dinoland.

Mama Scelidosaurus, Rufname „Sceli", war die Mutter der beiden Zwillinge. Sie verwaltete das Geld der Familie.



Es gab im Dinoland drei Sorten von Münzen: **Fels**, **Brocken** und **Kies**. Ein Fels war so viel Wert wie 2 Brocken, ein Brocken so viel wie 2 Kies.



Natürlich war da auch noch eine Lehrerin auf dem Ankylosaurus-Gymnasium. Das war die Frau Antarctosaurus, Rufname „Anta". Sie war sehr streng und gab den Dinokindern immer viele Hausaufgaben auf.
Proci und Proto saßen dann in ihrer Höhle und schwitzten und stöhnten. Sie hätten viel lieber draußen gespielt. Gab es doch im Dinoland so viel zu entdecken. Aber alles Jammern half nichts. Die Pflicht rief.

Aufgabe 1: Wie viel Kies ist ein Fels?
Aufgabe 2: Wie viel Kies sind 2 Fels 3 Brocken 1 Kies?
Aufgabe 3: Wechsele jeweils in möglichst große Münzen: 23 Kies, 48 Kies, 120 Kies, 26 Brocken und 33 Brocken.
Aufgabe 4: Proci erhält von Proto 4 Fels 2 Brocken. Proci gibt Proto dafür 105 Kies. Ist der Tausch fair?
Aufgabe 5: Welches Stellenwertsystem könnte im Dinoland leicht eingeführt werden?

Im Dinoland könnte zur Zahldarstellung leicht das **Zweiersystem** eingeführt werden. Es heißt auch **Dual-**[1] oder **Binärsystem**[2]. Für dieses System benötigt man nur die zwei Ziffern 1 und 0.

Wir zählen einmal im Dualsystem:

0_2, 1_2, 10_2, 11_2, 100_2, 101_2, 110_2, 111_2, 1000_2, …

(10_2 wird „eins null" gelesen, 11_2 wird „eins eins" gelesen usw.)

Da wir ja nur die Ziffern 0 und 1 haben, muss die nächste Zahl nach der 1 schon zweistellig sein.

Zahldarstellungen im Dualsystem versehen wir mit dem **Index 2** und unterscheiden sie dadurch von Zahldarstellungen in anderen Stellenwertsystemen.

Merke

Die Zahldarstellung im **Zweiersystem** ist die Kurzschreibweise einer **Zweierpotenzsumme**.

Man benötigt dazu nur die zwei Ziffern **1** und **0**.

Die Stellenwerte sind Potenzen von 2. Die Zahl 2 ist die Basis, die Zweierpotenzwerte sind die Stufenzahlen des Systems.

Damit man Zahldarstellungen im Zweiersystem schnell erkennen kann, schreiben wir sie immer mit dem **Index 2**.

Eine Übersicht über die ersten 10 Stellen des Dualsystems gibt die folgende Stellenwerttafel:

Stelle	…	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Stellenwert	…	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Stufenzahl	…	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Mithilfe der Stellenwerttafel lassen sich Zahlzeichen des Zweiersystems leicht in Zahlzeichen des Zehnersystems übertragen.

[1] duo (lat.), zwei

[2] bini (lat.), je zwei

Beispiel 1

Wir übertragen 100101_2 ins Zehnersystem.
Dazu schreiben wir 100101_2 stellengerecht in eine Stellenwerttafel des Zweiersystems.

Stelle	…	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Stellenwert	…	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Stufenzahl	…	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
Zahl						1	0	0	1	0	1

Aus der Tafel lesen wir ab:

$$\begin{aligned} 100101_2 &= 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 \\ &= 32+4+1 = \mathbf{37} \end{aligned}$$

Beispiel 2

Wir übertragen 1011100_2 ins Zehnersystem.
Dazu schreiben wir 1011100_2 wieder stellengerecht in eine passende Stellenwerttafel des Zweiersystems.

Stelle	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Stellenwert	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Stufenzahl	64	32	16	8	4	2	1
Zahl	1	0	1	1	1	0	0

Aus der Tafel lesen wir ab:

$$\begin{aligned} 1011100_2 &= 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 \\ &= 64+16+8+4 = \mathbf{92} \end{aligned}$$

Nach einigem Üben können wir auf eine Stellenwerttafel verzichten.

Beispiel 3

a) $$\begin{aligned} 10101011_2 &= 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 \\ &= 128+32+8+2+1 = \mathbf{171} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 110010000_2 &= 1\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 \\ &= 256+128+16 = \mathbf{400} \end{aligned}$$

So kann man jede Zahl des Dualsystems in das Zehnersystem übertragen.

Wie umgekehrt beliebige natürliche Zahlen im Zweiersystem dargestellt werden, zeigen die folgenden Beispiele.

Beispiel 4

Wir übertragen 23 ins Zweiersystem.

Zuerst muss 23 als Summe von Zweierpotenzen dargestellt werden.

$$\begin{aligned}
23 &= 1\cdot 16 + 7 \\
&= 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 7 \\
&= 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 3 \\
&= 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1 \\
&= 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 \\
&= \mathbf{1}\cdot 2^4 + \mathbf{0}\cdot 2^3 + \mathbf{1}\cdot 2^2 + \mathbf{1}\cdot 2^1 + \mathbf{1}\cdot 2^0 \\
&= \mathbf{10111}_{\mathbf{2}}
\end{aligned}$$

10111_2 ist die Darstellung der natürlichen Zahl *dreiundzwanzig* im Zweiersystem.

Beispiel 5

a) $99 = 64 + 35 = 64 + 32 + 3 = 64 + 32 + 2 + 1$

$$= \mathbf{1}\cdot 2^6 + \mathbf{1}\cdot 2^5 + \mathbf{0}\cdot 2^4 + \mathbf{0}\cdot 2^3 + \mathbf{0}\cdot 2^2 + \mathbf{1}\cdot 2^1 + \mathbf{1}\cdot 2^0 = \mathbf{1100011}_{\mathbf{2}}$$

b) $150 = 128 + 22 = 128 + 16 + 6 = 128 + 16 + 4 + 2$

$$= \mathbf{1}\cdot 2^7 + \mathbf{0}\cdot 2^6 + \mathbf{0}\cdot 2^5 + \mathbf{1}\cdot 2^4 + \mathbf{0}\cdot 2^3 + \mathbf{1}\cdot 2^2 + \mathbf{1}\cdot 2^1 + \mathbf{0}\cdot 2^0 = \mathbf{10010110}_{\mathbf{2}}$$

Zweierpotenzen spielen eine wichtige Rolle bei der Angabe von **Datenmengen**.

So lesen wir z.B. bei der Speicherkapazität für einen USB-Stick 8 GB oder für die Speicherkapazität einer Festplatte 1 TB. Was bedeuten diese Angaben?

Dazu muss man wissen, dass ein Zeichen (Buchstabe, Ziffer, Sonderzeichen) in einem Computer durch eine 8-stellige Dualzahl dargestellt wird, wie z.B.:

Zeichen	Ziffer 1	Großbuchstabe A	Sonderzeichen +
Dualzahl	0011 0001	0100 001	0010 1011

Diese Dualzahl besteht also aus 8 Binärziffern (also 0 oder 1), die man **bit** (**binary digit**) nennt.

8 bit fasst man zu einem **Byte** zusammen (byte ist ein künstliches Wort).

Obereinheiten sind:

1 KB = 1 Kilobyte = 2^{10} Byte = 1024 Byte

1 MB = 1 Megabyte = 2^{20} Byte =1024 KB = 1 048 576 Byte

1 GB = 1 Gigabyte = 2^{30} Byte = 1024 MB = 1 048 576 KB = 107 3741 824 Byte

1 TB = 1 Terabyte = 2^{40} Byte = 1024 GB = 1 048 576 MB = 1 073 741 824 KB

Das jpg-Bild von obigem USB-Stick benötigt einen Speicherplatz von 34 KB und das jpg-Bild mit der Festplatte 141 KB.