Lineare Gleichungssysteme

1.1 Lineare Gleichungen mit einer Variablen

Wiederholungen

① Löse die folgenden linearen Gleichungen. Beachte dabei die Lösungsschritte unter ②. Gib die Lösungsmenge L an.

Eine Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen (siehe auch Buch 7, Seite 226) in die Form $a \cdot x + b = 0$ bringen lässt, heißt **lineare Gleichung**; x ist die **Lösungsvariable**, die **Formvariablen** a und b stehen für beliebige Zahlen.

a)
$$12+4\cdot(x-1)=3\cdot(x+2)+1$$

b)
$$12+3\cdot(x-1)=3\cdot(3-x)$$

c)
$$12+3\cdot(x+1)=3\cdot(3+2x)$$

Lösungen: -1, 2, 0

② Bringe die Lösungsschritte zum Lösen der obigen Gleichungen durch Nummerieren von 1 bis 7 in die richtige Reihenfolge.

Bringe die Variable auf eine Seite.	Mache die Probe.	
Vereinfache auf beiden Seiten.	Isoliere die Variable.	
Löse die Klammern auf.	Gib die Lösungsmenge an.	
Berechne die Variable.		

③ Die Lösung der linearen Gleichung $a \cdot x = b$ kannst du mithilfe der Formvariablen a und b untersuchen.

Ergänze.

Ist a ≠ 0, so hat die Gleichung ______.

Ist a = 0 und $b \neq 0$, so hat die Gleichung ______.

Ist a = 0 und b = 0, so hat die Gleichung ______.

(keine Lösung, unendlich viele Lösungen, genau eine Lösung)

1. Überprüfe, ob es sich um lineare Gleichungen handelt. Wenn ja, löse sie und gib die Lösungsmenge an.

a)
$$12(8-x)-119=7-(x+8)$$

b)
$$17-4(2x-4)=(12-4x)-15$$

c)
$$2x^2 - 18 = (x + 12)(2x + 3)$$

d)
$$12x^2 + 15x - 5 = (2x - 5)(4x + 5)$$

e)
$$(x-2)(9x+5) = (3x-2)^2$$

$$f) \quad \frac{1}{x-1} = x+3$$

2. Löse die folgenden linearen Gleichungen. Du brauchst dafür Sicherheit und Ausdauer bei den notwendigen Termumformungen.

a)
$$6(x+4)-x=-(3x-32)$$
 b) $5y+7(2y+1)=3y+39$ c) $0=13-2x-8+3x-7$

b)
$$5v + 7(2v + 1) = 3v + 39$$

c)
$$0 = 13 - 2x - 8 + 3x - 7$$

d)
$$15 - (5u - 7) = -(5 - 4u)$$
 e) $4y + 3(y + 1) = 7y + 4$ f) $5x + 3(x + 1) = 7x + 3$

e)
$$4y + 3(y + 1) = 7y + 4$$

f)
$$5x + 3(x + 1) = 7x + 3$$

g)
$$2(3x-4)-(4x-6)=28$$
 h) $5a=3(a+1)+(a+5)$ i) $-(b+6)-2(b-9)=0$

h)
$$5a = 3(a + 1) + (a + 4)$$

i)
$$-(b+6)-2(b-9)=0$$

j)
$$(x + 3)^2 - 4x = (x + 3)(x - 3) + 2x$$

j)
$$(x+3)^2 - 4x = (x+3)(x-3) + 2x$$
 k) $(2y+5)^2 - 30 = 4(y+5)(y-1) + 19$

3. Löse die folgenden Gleichungen nach x auf. Gleichungen mit Formvariablen werden genauso umgeformt wie Gleichungen mit Zahlen.

a) $a \cdot x - b \cdot x = 1$

Für welchen Wert für a hat diese Gleichung keine Lösung? Begründe.

b) $a \cdot x - 2 = 8 - 2x$

Für welchen Zahlenwert für a hat diese Gleichung die Lösung 1? Begründe.

c) $a \cdot x + 2a - b \cdot x - b = 2a - b$

Für welchen Wert für a hat diese Gleichung unendlich viele Lösungen? Begründe.

4. Finde heraus, was gesucht ist; schreibe die Textgleichung als mathematische Gleichung und löse sie. Überprüfe das Ergebnis am Text.

- a) Wenn du von 66 das Doppelte einer unbekannten Zahl subtrahierst, dann erhältst du 38.
- b) Du denkst dir eine Zahl. Wenn du 1 zum Dreifachen deiner gedachten Zahl addierst, dann erhältst du die um 17 vergrößerte gedachte Zahl.

5. Fertige dir eine passende Skizze mit den gegebenen Informationen an. Stelle den Zusammenhang zwischen gegebenen Informationen und gesuchtem Stück in einer Gleichung dar.

- Die Kanten eines Geodreiecks haben insgesamt eine Länge von 386 mm. Eine kurze Kante ist 11,3 cm lang. Wie lang ist die Zeichenkante des Geodreiecks?
- b) Der Umfang U eines Rechtecks hat eine Länge von 112 cm. Die Seitenlängen des Rechtecks unterscheiden sich um 8 cm. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

6. Lohnt es sich, in Luxemburg zu tanken? (Euro Super 95: 1,573 €Liter; Abnutzungsgebühr Auto: 5 €100 km)

Beschaffe dir die notwendigen Daten, um diese Frage zu beantworten. Rechne dann.

1.2 Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Who wants to be a millionaire?

Quizsendungen in Form von Ratespielen sind im Fernsehen aktuell. Dabei muss die richtige Antwort in 20 Sekunden eingeloggt sein.

Aus der Kategorie "Mathematik" wird folgendes Zahlenrätsel mit den vier angegebenen Antwortmöglichkeiten präsentiert. Logge die richtige Antwort ein, indem du das Antwortfeld grün einfärbst.

Denke dir zwei Zahlen aus. Wenn du zum Doppelten der ersten Zahl die zweite Zahl ad dierst, dann muss das Ergebnis 15 sein.					
1	Die zwei Zahlen müssen positiv sein.	2	Die zwei Zahlen müssen verschieden sein.		
3	Es gibt unendlich viele Beispiele für solche zwei Zahlen.	4	Es können nur zwei Zahlen ausgewählt werden, die gleiches Vorzeichen haben.		

Der Mathematiklehrer arbeitet dieses Ratebeispiel im Unterricht systematisch auf, um die ausgewählte Antwort nach gründlichen Überlegungen zu überprüfen. Er fordert die Schüler auf, die folgende Tabelle auszufüllen.

		П		1	
a)	erste Zahl (x)	zweite Zahl (y)		Paarschreibweise (x y)	Probe
	1				
		į	5		
	3,5				
		1	.1		
	7				
		;	3		
	0				
b)	Antwort	w	f	Begrüi	ndung
	1				

c) Für obiges Zahlenrätsel lässt sich eine Gleichung aufstellen. Ergänze sie.



d) Ergänze.

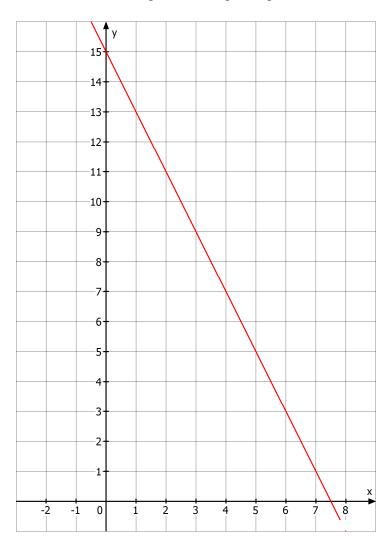
Bei der Gleichung handelt es sich um eine _____ Gleichung mit _____ Variablen.

Die Lösungsmenge L besteht aus unendlich vielen ______.

Zu jeder beliebigen ersten Zahl \times erhält man immer eine zweite Zahl y, indem man

Lösungsmenge $L = \{(x|y) \mid y = \underline{\hspace{1cm}} \}$

e) Grafische Darstellung der Lösungsmenge L durch eine Gerade.



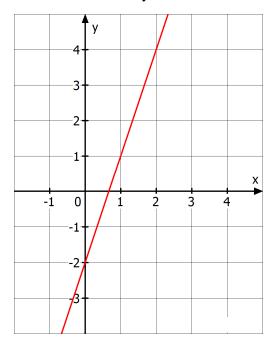
- 1. Trage die Zahlenpaare aus a) als Punkte in die grafische Darstellung der Lösungsmenge L ein.
- 2. Finde noch weitere Punkte, die Lösungspaare der Gleichung sind.
- 3. Begründe, warum der Punkt P(3|6) kein Lösungspaar der Gleichung ist.
- 4. Wie viele Lösungspaare brauchst du, um alle anderen Lösungspaare zu erhalten? Beschreibe, wie du vorgehst.

Die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ mit a, b $\neq 0$ heißt lineare Gleichung mit zwei Variablen x und y. Die Lösungen solcher Gleichungen sind Zahlenpaare. Die dazugehörigen Punkte liegen auf einer Geraden.

7. Überprüfe durch Einsetzen, ob die Zahlenpaare Lösungen der Gleichung sind. Stelle die Lösungsmenge L grafisch dar.

a)	3x + 5y = 10	(0 2)	(10 -8)	(15 7)	(5 -1)	$(\frac{5}{3} 1)$	$(\frac{1}{2} 1,7)$
b)	y + 2x = 6	(0 -6)	(1 4)	(-1 8)	(0,5 -5)	(1,5 3)	(3 0)

8. Gegeben ist die grafische Darstellung der Lösungsmenge L einer linearen Gleichung mit zwei Variablen x und y.



- a) Notiere eine lineare Gleichung mit zwei Variablen x und y, die zu dieser Lösungsmenge gehört.
- b) Gib drei Zahlenpaare an, die Lösungen dieser Gleichung sind.
- c) Schreibe die Gleichung in der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ (**implizite Form**).
- d) Kreuze die Gleichungen an, die die gleiche Lösungsmenge wie die im Bild dargestellte Lösungsmenge haben. Begründe.

$$6x - 2y = 4 \qquad \square$$

$$3x + y = -2$$

$$-1,5x + 0,5y = -1$$

9. Die folgende lineare Gleichung mit den beiden Variablen x und y ist in der **expliziten** Form gegeben: y = 6x - 2.

Bestimme in nachstehenden Zahlenpaaren die fehlende Zahl so, dass sich eine Lösung der Gleichung ergibt.

e)
$$(x \mid -\frac{3}{2})$$

f)
$$(\frac{5}{3} | y)$$

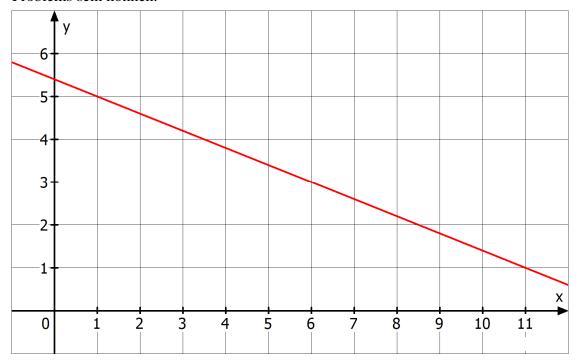
10. Gib jeweils die fehlende Schreibweise der linearen Gleichung an.

	implizite Form	explizite Form		
a)		x = 3y – 5		
b)	2x + 6y = 18			
c)		y = -5x + 8		

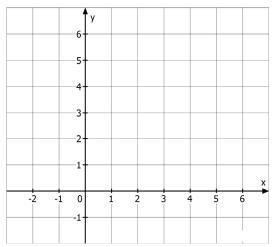
11. Die Klasse 9a soll den Geldbetrag von 27 Cent nur mit 2- und 5-Cent-Münzen darstellen. Dafür schreibt die Mathematiklehrerin folgende Gleichung an die Tafel:

$$2 \cdot x + 5 \cdot y = 27$$

- a) Welche Bedeutung haben die beiden Lösungsvariablen x und y?
- b) Kreuze die Zahlenpaare an, die Lösung des obigen Problems sind.
- c) Begründe, warum nicht alle Punkte auf der Zahlengeraden Lösungen des obigen Problems sein können.



- **12.** Gesucht wird eine zweistellige Zahl. Wenn man bei dieser Zahl zum Achtfachen der Zehnerziffer x das Vierfache der Einerziffer y addiert, dann erhält man 24.
 - a) Schreibe dazu eine lineare Gleichung mit den Variablen x und y auf?
 - b) Zeichne in das Koordinatensystem die zugehörige Gerade und bestimme zweistellige Zahlen mit dieser Eigenschaft.



zweistellige Zahlen:				