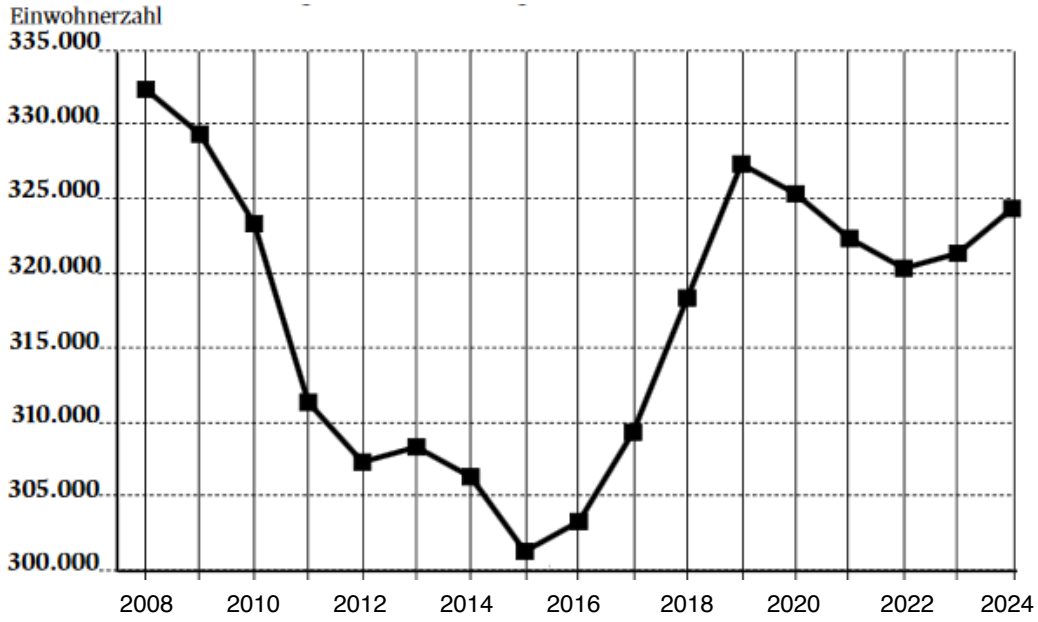
Wachstum

7

7.1 Wachstum und Abnahme

① Bevölkerungsentwicklung einer Stadt seit 2008



a)
- Von 2008 bis 2015 ist die Einwohnerzahl von _____ auf _____ gesunken.
- Von 2015 bis 2019 stieg die Einwohnerzahl rasant an auf _____ Einwohner.

Aus der **Differenz zweier Werte** ergibt sich der **absolute Zuwachs** bzw. die **absolute Abnahme**.

absolute Abnahme	absolute Zunahme

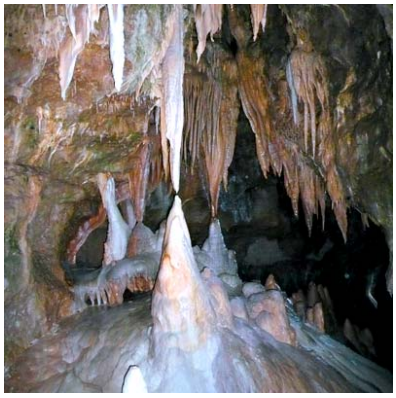
Aus dem **Quotienten zweier Werte** ergibt sich der **relative Zuwachs** bzw. die **relative Abnahme**.

relative Abnahme	relative Zunahme

b) Wie viel Prozent der Einwohnerzahl von 2008 entspricht die Zahl im Jahr 2024?

7.2 Lineares Wachstum

①

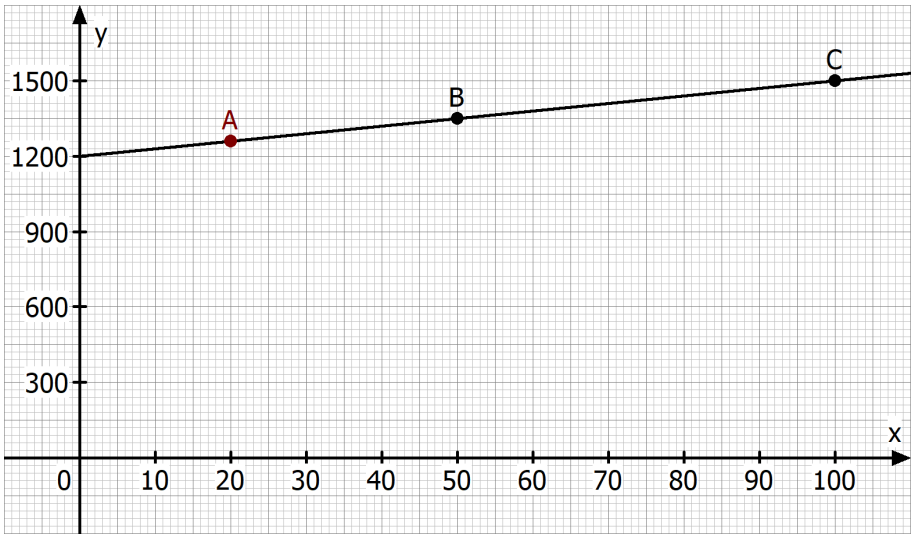


Ein Stalagmit in einer Höhle ist 1,2 m hoch. Er wächst jährlich um durchschnittlich 3 mm. Wie viele Zentimeter ist der Stalagmit nach zehn Jahren angewachsen und wie hoch ist er dann?

Mathematisch betrachtet handelt es sich dabei um eine Zuordnung, bei der der Zeit die Höhe des Stalagmiten zugeordnet ist.

Zeit t in Jahren ⟶ Höhe in mm

Das Schaubild zeigt das Wachstum des Stalagmiten in Abhängigkeit von der Zeit.



a) Beschrifte die beiden Koordinatenachsen sinngemäß.

b) Was stellen die Punkte A, B und C im Koordinatensystem dar?

c) Kannst du ablesen, wie hoch der Stalagmit nach 100 Jahren ist?

d) Ergänze.

Jahre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Höhe (mm)										

e) Wie hoch ist der Stalagmit nach zehn Jahren? Es gibt zwei Rechenwege.

Möglichkeit 1:	_____ mm + 3 mm = _____ mm
Möglichkeit 2:	_____ mm + ____ · 3 mm = _____ mm

②

Ändert sich bei einem Wachstumsvorgang ein Wert B(t) in gleichen Zeitabständen t immer um dieselbe Konstante b (Wachstumskonstante), so spricht man von **linearem Wachstum**. B steht allgemein für Bestand, B(0) ist der Anfangswert, B(t) ist der Endwert.

a) Begründe, warum das Stalagmitenwachstum linear ist.

b) Berechne B(11) auf zwei Arten.

Lineare Wachstumsprozesse lassen sich mithilfe von Wachstumsformeln auf zwei Arten darstellen.

rekursive Darstellung	explizite Darstellung
$B(t+1) = B(t) + b$	$B(t) = B(0) + b \cdot t$

c) Peter soll die Höhe des Stalagmiten nach 500 Jahren berechnen und entscheidet sich für die explizite Darstellung. Begründe.

Anfangswert:	B(0)	=	
Wachstumskonstante:	b	=	
Zeitabstand:	t	=	
Endwert:	B(t)	=	

Rechnung:

1. Seit dem Jahr 2010 wird das Wachstum eines Stalagmiten beobachtet. In jedem Jahr wird seine Gesamthöhe notiert.

2010	2011	2012	2013	2014	2015
1,568 m	1,576 m	1,584 m	1,592 m	1,6 m	1,608 m

a) Gib die Wachstumskonstante b an.

b = ____ mm = _____ m

b) Auf welche Höhe wird er im Jahr 2020 und 2025 angewachsen sein?

Höhe 2020:

Höhe 2025:

2. Ein Stalagmit in einer slowenischen Karsthöhle ist heute 2,4 m hoch. Man geht von einem jährlichen konstanten Wachsen von 5 mm aus.

a) Wie hoch war der Stalagmit vor 200 Jahren?

Anfangswert:	B(0)	=
Wachstumskonstante:	b	=
Zeitabstand:	t	=
Endwert:	B(t)	=

Rechnung:

b) In wie vielen Jahren wird der Stalagmit die Höhe von 3 m überschreiten?

c) In einer alten Beschreibung des obigen Stalagmiten steht zu lesen:
Das Wachstums des Stalagmiten kann mit der Formel B(t) = 2,10 m + 0,005·t angegeben werden.
Vor wie vielen Jahren ist diese Formel geschrieben worden?

3. Auch Bäume wachsen annähernd konstant. Ein Baum wird heute in den Garten gepflanzt. Zu diesem Zeitpunkt ragt er 1 m aus dem Boden heraus. Er wächst durchschnittlich 20 cm im Jahr.

a) Wie hoch ragt der Baum nach 8 Jahren aus dem Boden heraus?

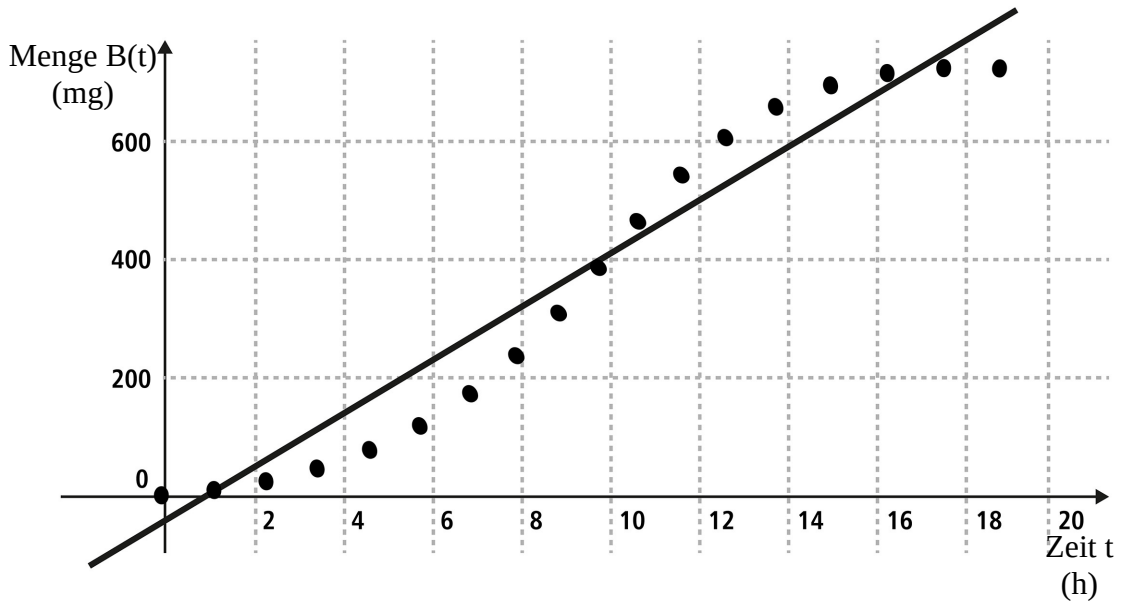
b) Nach wie vielen Jahren ist der Baum 5 m hoch?

c) Ein weiterer Baum hat bei gleichen Wachstumsbedingungen nach 20 Jahren eine Höhe von 5,50 m? Wie hoch ragte er beim Pflanzen aus dem Boden heraus?

4. Modellieren eines Wachstumsprozesses

Anhand einer realistischen Datenmenge wird das Wachstum einer Hefekultur beschrieben.

Peter hat ein Wachstumsmodell, das an die realen Daten angenähert ist, zeichnerisch dargestellt.



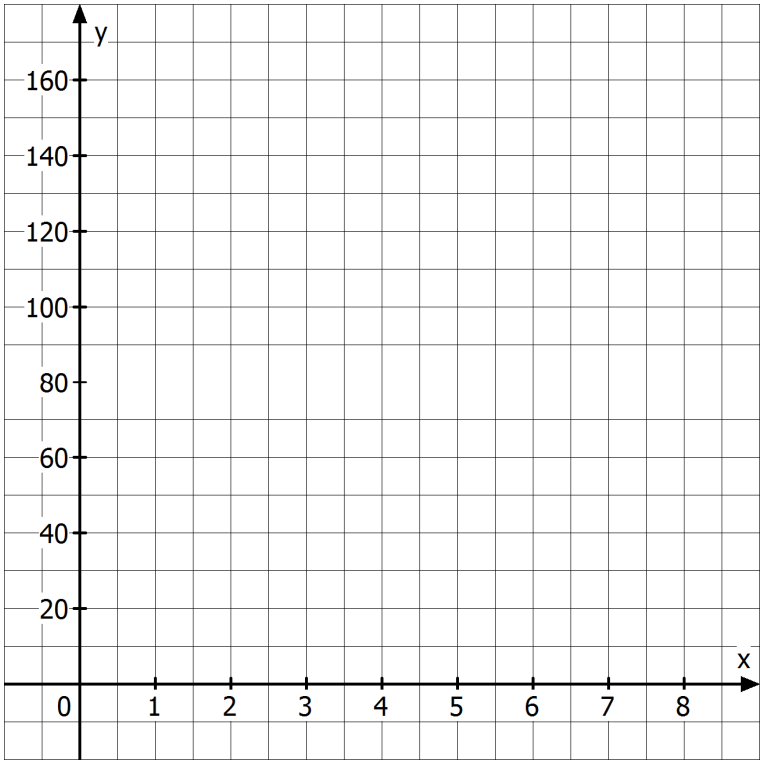
a) Beschreibe die Einteilung der Achsen. Beschreibe, wie sich die Zuwächse der Hefemenge B mit zunehmender Zeit t verändern. Beschreibe, wie Peter diese Wachstumsform vereinfacht hat.

b) Vergleiche dieses vereinfachte Wachstumsmodell mit der realistischen Datenmenge. Beschreibe Nachteile und falsche Vorstellungen, die sich aus der vereinfachten Modellierung ergeben.

Realistische Daten lassen sich oftmals nur angenähert durch ein mathematisches Modell beschreiben.

Explizite Wachstumsformel und Geradengleichung

① Fritz bekommt von seinem Patenonkel 50 € geschenkt. Er verspricht ihm, jedes weitere Jahr 20 € zu schenken.



a) Beschrifte die Achsen sinngemäß.

b) Wie viel Geld hat Fritz nach 5 Jahren? Modelliere das Geldwachstum durch eine Wachstumsformel in der expliziten Darstellung.

Anfangswert:	B(0)	=	
Wachstumskonstante:	b	=	
Zeitabstand:	t	=	
Endwert:	B(t)	=	

Formel:

Rechnung:

c) Stelle das Geldwachstum im Koordinatensystem graphisch dar.

Die explizite Wachstumsformel für lineares Wachsen entspricht der Geradengleichung $y = m \cdot x + n$. Der y-Achsenabschnitt n stimmt mit dem Anfangswert B(0), die Steigung m mit der Wachstumskonstante b überein.

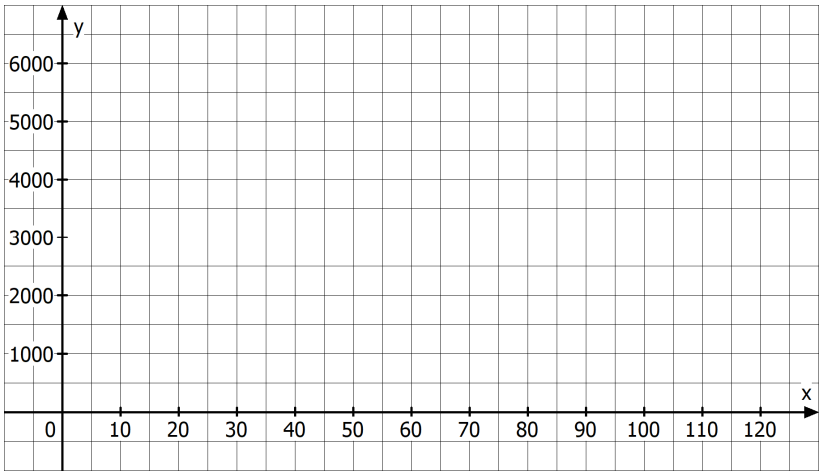
d) Geradengleichung: y =

5. Ein Wasserbecken ist mit 6000 Liter Wasser bis zum Rand gefüllt. Bei der Teichfolie ist am Boden ein Loch entstanden. Pro Minute laufen jetzt 50 Liter Wasser weg.

a) Erstelle ein lineares Modell $B(t) = B(0) + b \cdot t$, wobei B(t) das Wasservolumen nach t Minuten angibt.

b) Begründe, warum es sich bei diesem Vorgang um ein **lineares Abnehmen** handelt.

c) Stelle den Prozess graphisch dar. Beschrifte die Achsen sinngemäß. Zeichne ein Steigungsdreieck ein und begründe ein lineares Abnehmen anhand der **Steigung m**.
Gib eine Geradengleichung der Form $y = m\,x + n$ an.



d) Wie viel Wasser befindet sich nach 40 Minuten noch im Becken?

6. Das lineare Wachstum einer Tanne wird durch die Geradengleichung $y = 0{,}3 \cdot x + 0{,}9$ beschrieben. Die Maßeinheit ist 1 Meter.

a) Wie hoch war die Tanne am Anfang? Anfangshöhe: B(0) =

b) Um wie viel cm soll die Tanne gemäß der Geradengleichung jährlich wachsen? Wachstumskonstante: b =

c) Welche Variable gibt die Zeitabstände an? Zeitabstand: t =

d) Wie hoch ist die Tanne nach 5 Jahren? Endhöhe: B(t) =

e) Die Tanne wird bei 6 m Höhe gefällt. Wie viele Jahre nach dem Pflanzen wird das sein?