6

Quadratische Funktionen

6.1 Die allgemeine quadratische Funktion

Im Alltag sowie auch in den Naturwissenschaften treten vielfach Zusammenhänge auf, bei denen die Änderung einer Größe vom Quadrat der anderen Größe abhängt.

In Fahrschulen wird z. B. eine Faustformel zur Berechnung des Bremsweges (d. h. des Weges, den ein Fahrzeug nach Einsetzen des Bremsvorgangs bis zum Stillstand zurücklegt) häufig wie folgt formuliert:

> „*Der Bremsweg s ergibt sich in der Einheit Meter, indem man den Zahlenwert der in km/h gemessenen Geschwindigkeit v quadriert und durch 100 dividiert.*“

Der Zusammenhang zwischen dem Bremsweg s (in m) und der Geschwindigkeit v (in km/h) kann beschrieben werden durch die Gleichung

$$s = \frac{1}{100}v^2 .$$

In dieser Gleichung tritt die Variable v in der zweiten Potenz („im Quadrat“) auf. Funktionen dieser Art bezeichnet man als **quadratische Funktionen**.

Die Graphen quadratischer Funktionen sind gekrümmte Linien und werden als **Parabeln** bezeichnet. Parabelförmige Bögen sind z. B. als Bestandteile von Brücken zu finden.

Wir wollen im Folgenden quadratische Funktionen betrachten, deren Funktionsgleichungen außer dem quadratischen Term x^2 weitere Glieder enthalten.

Allgemeine quadratische Funktion

Eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0$$

heißt **allgemeine quadratische Funktion**.

Das Ziel der nächsten Abschnitte besteht darin, schrittweise einen Überblick über die Graphen quadratischer Funktionen zu gewinnen.

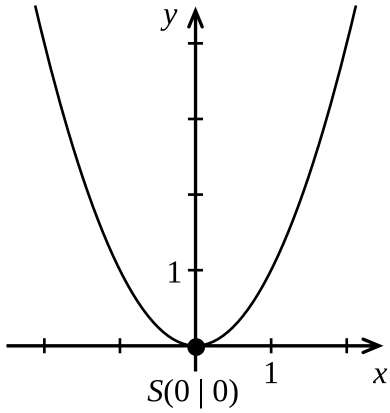
6.1.1 Die Normalparabel

Durch die Zuordnungsvorschrift

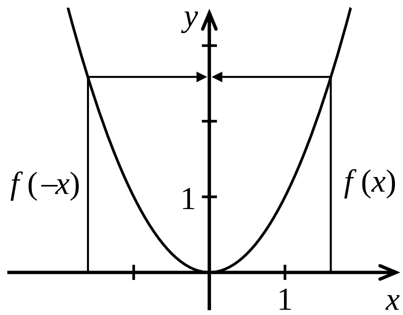
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x^2$$

ist die einfachste Funktion mit einem quadratischen Funktionsterm gegeben. Man bezeichnet sie als **Quadratfunktion**.

Wesentliche Eigenschaften der Quadratfunktion sind:



- Ihr Graph ist eine gekrümmte Linie und wird als **Normalparabel**[1] bezeichnet.
- Der Koordinatenursprung ist der tiefste Punkt der Normalparabel. Man bezeichnet ihn als **Scheitelpunkt** $S(0 \mid 0)$. Alle anderen Punkte der Normalparabel liegen oberhalb der x-Achse.
- Als Wertemenge der Quadratfunktion ergibt sich $W = [0\ ;\ \infty[$, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$.
- Die Normalparabel ist symmetrisch zur y-Achse, denn für jedes $x \in \mathrm{R}$ gilt:
  $$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\ .$$
  Die y-Achse wird als Symmetrieachse bezeichnet. Der Scheitelpunkt $S(0 \mid 0)$ ist der einzige Punkt der Normalparabel, der auf der Symmetrieachse liegt[2].



Aufgaben

1. Prüfen Sie zeichnerisch, welche Punkte auf der Normalparabel liegen. (Sie können eine Schablone verwenden.)

   a) $A(2{,}5 \mid 6)$ b) $B(-1{,}5 \mid 2{,}25)$ c) $C(-2{,}5 \mid 6{,}25)$

2. Entscheiden Sie rechnerisch durch eine Punktprobe, welche Punkte auf der Normalparabel liegen.

   a) $A(-0{,}8 \mid -0{,}64)$ b) $B(2{,}5 \mid 6{,}25)$ c) $C(-1{,}4 \mid -1{,}96)$

3. Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten so, dass die Punkte auf der Normalparabel liegen. In welchen Fällen gibt es mehrere Möglichkeiten?

   a) $A(0{,}7 \mid\ ?\ )$ b) $B(1{,}5 \mid\ ?\ )$ c) $C(\frac{1}{2} \mid\ ?\ )$ d) $D(\sqrt{2} \mid ?)$

   e) $E(-\sqrt{10} \mid\ ?\ )$ f) $F(-\frac{2}{3} \mid\ ?\ )$ g) $G(\ ?\ \mid 81)$ h) $H(\ ?\ \mid 121)$

[1] Zum Zeichnen der Normalparabel kann eine Schablone verwendet werden, die im Handel angeboten wird.
[2] Symmetrieeigenschaften von Funktionen werden in Band II wieder aufgegriffen und vertieft.

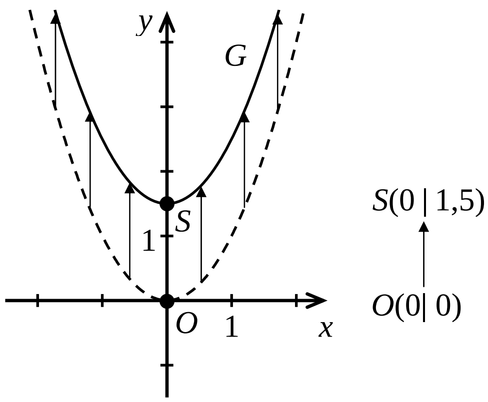
6.1.2 Verschiebungen der Normalparabel

Wir betrachten Variationen der Quadratfunktion und gehen dabei ähnlich vor wie bei der Behandlung der allgemeinen Betragsfunktionen.

Verschiebung in *y*-Richtung

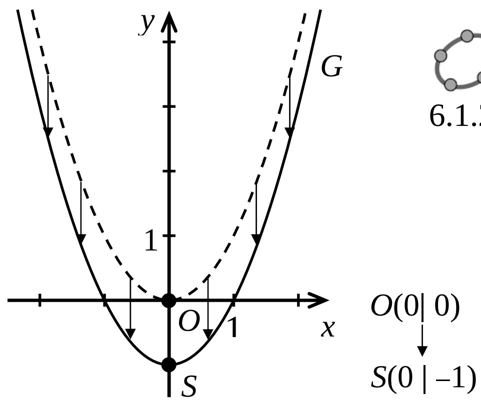
Wir betrachten zunächst den Übergang von der Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ zu Funktionen der Form $x \mapsto x^2 + y_S$. Der Parameter y_S bewirkt eine Verschiebung in y-Richtung gegenüber der Normalparabel.

$g:\ x \mapsto x^2 + 1{,}5$



Verschiebung: um 1,5 nach oben

$h:\ x \mapsto x^2 - 1$



6.1.2 a

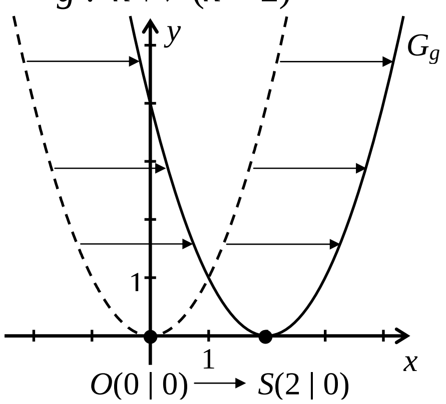
Verschiebung: um 1 nach unten

> **Verschiebung in *y*-Richtung**
>
> Der Graph der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + y_S$ ist eine in y-Richtung verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(0 \mid y_S)$. Dabei erfolgt die Verschiebung
>
> - für $y_S > 0$ nach oben,
> - für $y_S < 0$ nach unten.

Verschiebung in *x*-Richtung

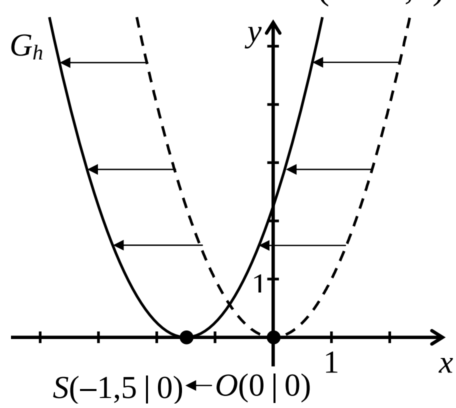
Wir betrachten den Übergang von der Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ zu Funktionen der Form $x \mapsto (x - x_S)^2$. Der Parameter x_S bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung gegenüber der Normalparabel.

$g:\ x \mapsto (x-2)^2$



Verschiebung: um 2 nach rechts

$h:\ x \mapsto (x+1{,}5)^2$



6.1.2 b

Verschiebung: um 1,5 nach links

Verschiebung in x-Richtung

Der Graph der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x - x_S)^2$ ist eine in x-Richtung verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(x_S \mid 0)$. Dabei erfolgt die Verschiebung

- für $x_S > 0$ nach rechts,
- für $x_S < 0$ nach links.

AB 6.1.2
4

Aufgaben

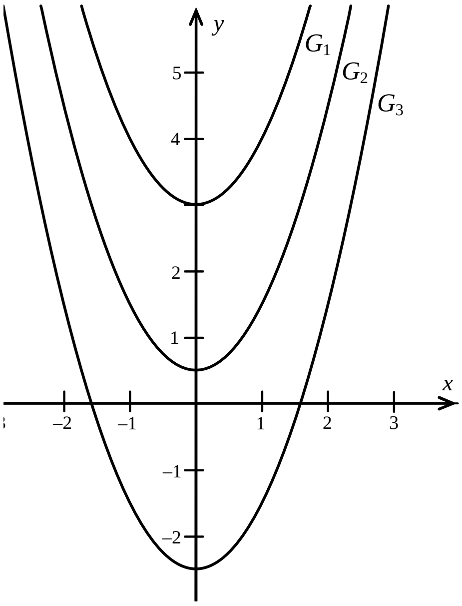
4. Bestimmen Sie zu den Parabeln die Verschiebung und den Scheitelpunkt. Zeichnen Sie je drei Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

a) $f: x \mapsto x^2 - 3$ b) $g: x \mapsto (x-1)^2$ c) $h: x \mapsto x^2 + \sqrt{2}$

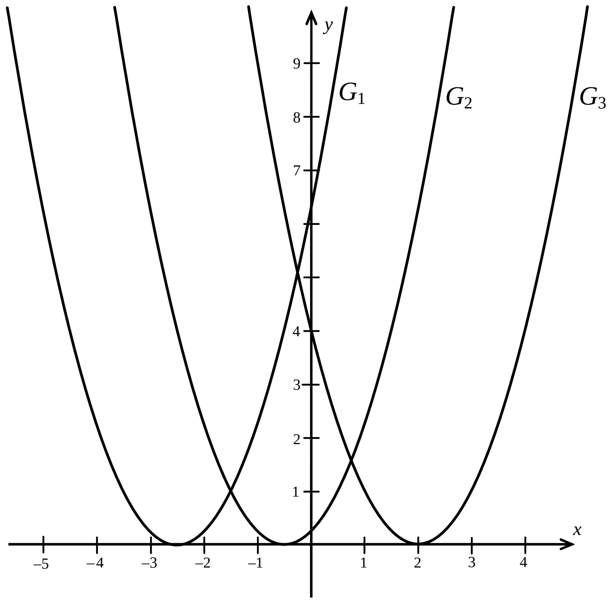
d) $f: x \mapsto (x+3{,}5)^2$ e) $g: x \mapsto x^2 + 2{,}5$ f) $h: x \mapsto (x-1{,}5)^2$

5. Lesen Sie die Funktionsgleichungen der verschobenen Normalparabeln aus dem Schaubild ab.

a)



b)



6. Die Normalparabel wird wie angegeben verschoben. Geben Sie eine Funktionsgleichung für die verschobene Parabel und den Scheitelpunkt an.

a) 3 Einheiten nach rechts b) 2,5 Einheiten nach unten

c) 6 Einheiten nach oben d) $\frac{1}{2}$ Einheit nach links

7. Gegeben ist der Scheitelpunkt einer verschobenen Normalparabel. Geben Sie eine zugehörige Funktionsgleichung an.

a) $S(0 \mid -5)$ b) $S(-4{,}5 \mid 0)$ c) $S(1{,}5 \mid 0)$ d) $S(0 \mid 3{,}5)$

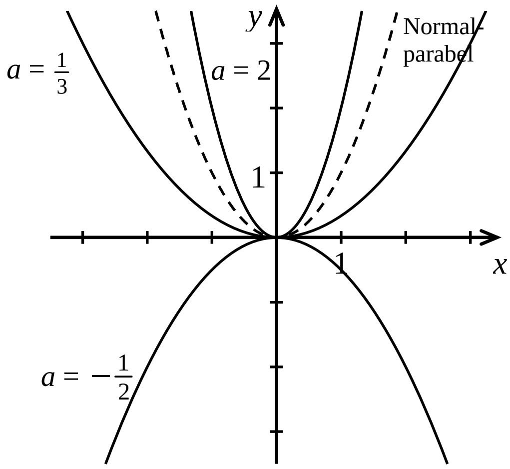
6.1.3 Streckung und Stauchung der Normalparabel

Der Graph der Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto a\,x^2$$

ist für $a > 0$ eine nach oben geöffnete Parabel, die

- für $a > 1$ gestreckt ist (Der Graph verläuft steiler als die Normalparabel),
- für $0 < a < 1$ gestaucht ist (Der Graph verläuft flacher als die Normalparabel).



6.1.3

Für $a < 0$ ist die zugehörige Parabel nach unten geöffnet. Sie ergibt sich durch eine zusätzliche Spiegelung an der x-Achse.

Streckung oder Stauchung in y-Richtung

Der Graph der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto a \cdot x^2$ mit dem **Formfaktor** $a \neq 0$ ist eine in y-Richtung **gestreckte** oder **gestauchte Parabel**. Dabei gilt:

- $a > 1$: Streckung (Die Parabel ist enger geöffnet als die Normalparabel.)
- $0 < a < 1$: Stauchung (Die Parabel ist weiter geöffnet als die Normalparabel.)

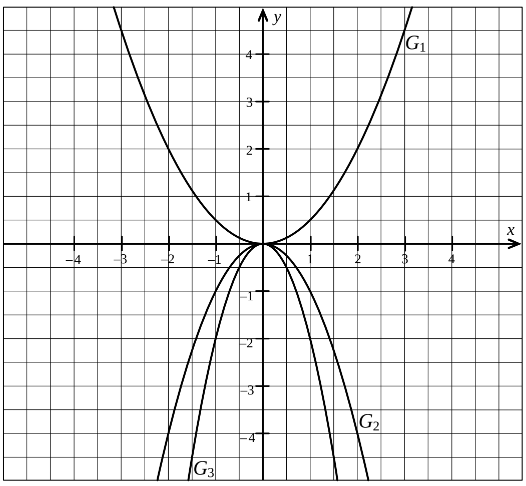
Formfaktoren $a < 0$ bewirken zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse.

Aufgaben

8. Entscheiden Sie, ob die zugehörigen Parabeln nach oben oder nach unten geöffnet und ob sie gestreckt oder gestaucht sind.

   a) $y = -4{,}5\,x^2$ b) $y = \frac{13}{12}\,x^2$ c) $y = 0{,}98\,x^2$ d) $y = -\frac{5}{4}\,x^2$

9. Lesen Sie Gleichungen der zugehörigen quadratischen Funktionen ab.

   a) 

   b)