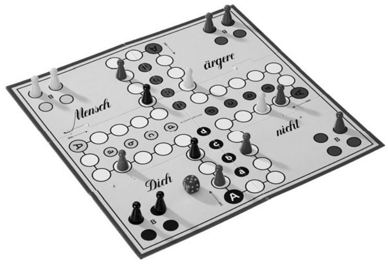
3.2 Das Wahrscheinlichkeitsmaß

3.2.1 Relative Häufigkeiten

Der Begriff der relativen Häufigkeit

Peter verliert beim *Mensch ärgere Dich nicht*. Wütend behauptet er, dass der verwendete Würfel zu viele Einsen liefere. Um den Streit zu schlichten, schlägt Petra vor, den „verdächtigen“ Würfel zu testen.



Petra würfelt 120-mal und notiert die jeweils gewürfelte Augenzahl, Peter würfelt sogar 200-mal.

Petras Ergebnis bei 120 Würfen:

Elementarereignis	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
absolute Häufigkeit	21	20	18	18	21	22
relative Häufigkeit	0,175	$0{,}1\overline{6}$	0,15	0,15	0,175	$0{,}18\overline{3}$

Peters Ergebnis bei 200 Würfen:

Elementarereignis	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
absolute Häufigkeit	36	33	32	34	33	32
relative Häufigkeit	0,18	0,165	0,16	0,17	0,165	0,16

In den zweiten Zeilen der Tabellen sind jeweils die **absoluten Häufigkeiten** notiert, mit denen die verschiedenen Augenzahlen in den Versuchsserien auftreten.

Zum besseren Vergleich ihrer Versuchsserien berechnen beide auch die relativen Anteile der Augenzahlen in ihren Versuchsserien, die so genannten **relativen Häufigkeiten**, indem sie die absoluten Anzahlen durch die Länge der Versuchsserie dividieren.

Der Vergleich der relativen Häufigkeiten liefert hier kein Indiz dafür, dass der verwendete Würfel unregelmäßig (gezinkt) ist.

Der Begriff *relative Häufigkeit* ist nicht nur auf Elementarereignisse beschränkt, sondern er kann auch für beliebige Ereignisse erklärt werden.

Relative Häufigkeit

Tritt das Ereignis A in einer Serie von n Versuchen z-mal ein, so heißt die Zahl

$$h_n(A) = \frac{z}{n} = \frac{\text{Anzahl der Versuche, bei denen } A \text{ eintritt}}{\text{Gesamtzahl der Versuche}}$$

relative Häufigkeit von A in dieser Serie.

Beispiel (Absolute und relative Häufigkeit im Eingangsbeispiel)

Betrachtet man im Eingangsbeispiel das Ereignis

A: „Peter würfelt eine gerade Zahl.“,

so beträgt die absolute Häufigkeit von A in dieser Serie $z(A) = 99$.

Für die relative Häufigkeit von A gilt dann:

$$h_{200}(A) = \frac{z(A)}{200} = \frac{99}{200} = 0{,}495 = 49{,}5\,\%.$$

Dies bedeutet: In 49,5 % der Fälle wird in der Serie eine gerade Zahl gewürfelt.

Eigenschaften der relativen Häufigkeit

Aus der Definition der relativen Häufigkeit lassen sich unmittelbar einige, zum Teil unmittelbar einsichtige Eigenschaften ableiten.

Tritt ein Ereignis A in einer Serie von n Versuchen z-mal ein, so gilt $0 \le z \le n$ oder $0 \le \frac{z}{n} \le 1$.	$0 \le h_n(A) \le 1$
Das sichere Ereignis Ω tritt immer ein, daher gilt $z = n$.	$h_n(\Omega) = 1$
Das unmögliche Ereignis { } tritt bei *keinem* Versuch ein, daher gilt $z = 0$.	$h_n(\{\ \}) = 0$
Die relative Häufigkeit für das Eintreten eines Ereignisses ist die Summe der relativen Häufigkeiten der zugehörigen Elementarereignisse.	$A = \{\omega_1, \omega_2 ..., \omega_k\}$ $h_n(A) = h_n(\{\omega_1\}) + ... + h_n(\{\omega_k\})$
Die Summe der relativen Häufigkeiten aller Elementarereignisse ist 1.	$1 = h_n(\{\omega_1\}) + ... + h_n(\{\omega_n\})$

Aufgaben

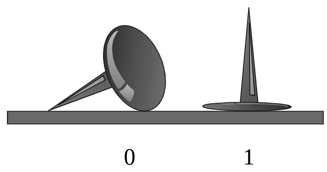
1. Bei einer Wahlumfrage in Saarlouis werden 175 Personen befragt, davon geben 91 an, Partei A zu wählen. In Saarbrücken geben 250 Personen Auskunft. Dort wollen 115 Personen Partei A ihre Stimme geben. Peter glaubt, dass die Zustimmung für die Partei A in Saarbrücken größer ist, da sich dort 24 Personen mehr zustimmend geäußert haben. Trifft dies zu?

2. In einem Betrieb sind 30% der Beschäftigten Frauen. 65 % der Männer können das Rauchen nicht lassen, insgesamt sind dies 455 männliche Raucher. Wie viele Beschäftigte hat der Betrieb?

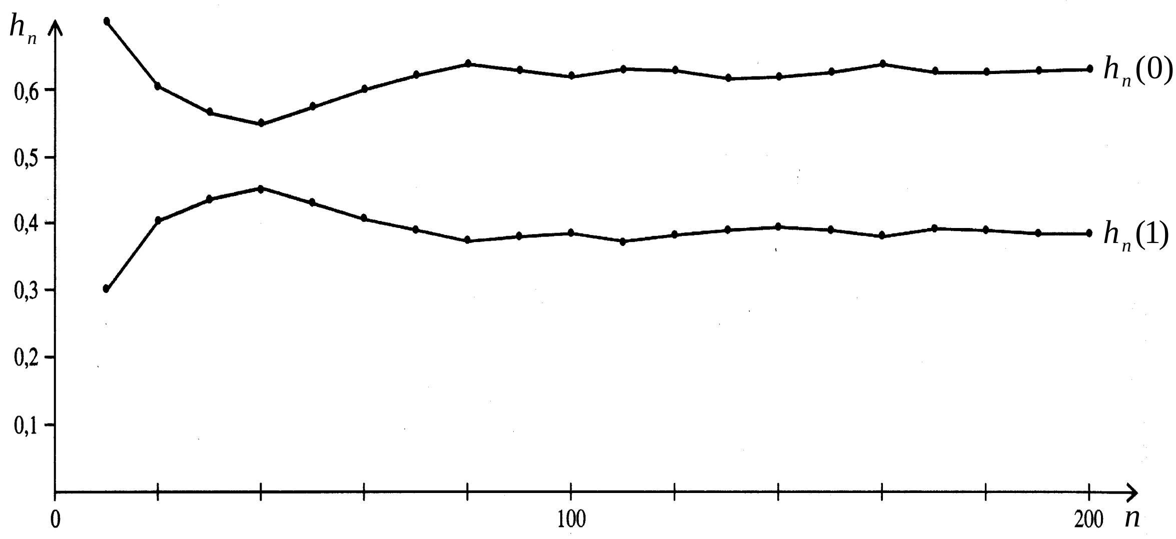
3. Die Anzahl der Angestellten, Arbeiter, Beamten und Selbstständigen einer Großstadt verhalten sich wie 5 : 3 : 3 : 1.
   Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten und die absoluten Zahlen, wenn die Stadt 402000 Bewohner zählt und nur 60% der Einwohner berufstätig sind.

3.2.2 Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Beim Werfen eines Reißnagels sind die beiden Ergebnisse 0 und 1 möglich.



Das Zufallsexperiment »Werfen eines Reißnagels« wird 200-mal durchgeführt. Nach jeweils 10 Versuchen werden die relativen Häufigkeiten $h_n(0)$ und $h_n(1)$ berechnet und in ein Diagramm eingetragen.



Es zeigt sich, dass die experimentell bestimmten relativen Häufigkeiten sich bei großen Versuchszahlen immer mehr **stabilisieren**. Diese Stabilisierung, die sich auch bei zahlreichen anderen Zufallsexperimenten zeigt, wurde von vielen Mathematikern immer wieder überprüft und bestätigt. Der daraus hergeleitete Erfahrungssatz trägt einen eigenen Namen:

Empirisches[(1)] **Gesetz der großen Zahlen**
Bei Zufallsexperimenten stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten eines bestimmten Ereignisses mit wachsender Versuchszahl.

Beim *Empirischen Gesetz der großen Zahlen* handelt es sich nicht um einen mathematischen Satz, der bewiesen werden kann, sondern nur um ein Erfahrungsgesetz. Es liegt eine Gesetzmäßigkeit vor, die nur bei einer großen Anzahl von Versuchen feststellbar ist.

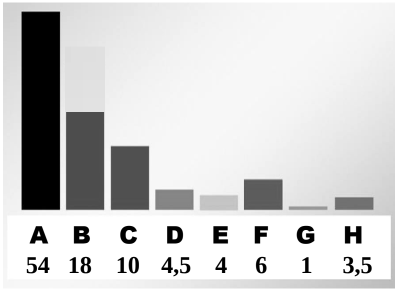
Eine Stabilisierung der relativen Häufigkeiten tritt bei langen Versuchsserien sehr häufig, jedoch zwangsläufig nicht immer ein. Es kann durchaus auch einmal vorkommen, dass eine Serie eintritt, in der die relativen Häufigkeiten stark schwanken, auch wenn die Serienlänge n sehr groß gewählt ist.
Solche „**Ausreißer**“ treten bei größeren Versuchszahlen n aber immer seltener auf.

---

(1) Empirisch bedeutet erfahrungsgemäß, aus der Erfahrung (Beobachtung) erwachsen, dem Experiment entnommen, von Empirie (griech.), Erfahrung, Erfahrungswissen.

Aufgaben

4. Schon unmittelbar nach Schließung der Wahllokale gibt es in der Fernsehberichterstattung die ersten Prognosen über den vermutlichen Wahlausgang. Im Laufe des Abends werden immer mehr Ergebnisse aus den einzelnen Stimmbezirken bekannt. Diese Zwischenergebnisse werden für „Hochrechnungen" des Wahlergebnisses benutzt.



   a) Die ersten Hochrechnungen für die A-Partei lagen bei 55 %, 53 % und bei 54 %. Obwohl erst ein Viertel der Stimmen ausgezählt ist, spricht der Vorsitzende der A-Partei von der absoluten Mehrheit.
   Handelt er voreilig?
   b) Die Hochrechnungen für die D-Partei waren 6 %, 4 % und 4,5 %. Kein Vertreter der D-Partei möchte sich zu einem möglichen Scheitern an der „5%-Hürde" äußern.
   Ist dies verständlich?

5. Ein Würfel wird 1000-mal geworfen. Dabei werden nach 50, 100, 250, 500 und 1000 Würfen für die einzelnen Augenzahlen die relativen Häufigkeiten berechnet.
   Es ergeben sich die folgenden Werte:

n	50	100	250	500	1000
$h(1)$	0,120	0,130	0,120	0,130	0,135
$h(2)$	0,200	0,180	0,220	0,190	0,196
$h(3)$	0,100	0,110	0,100	0,120	0,112
$h(4)$	0,160	0,170	0,160	0,150	0,156
$h(5)$	0,120	0,140	0,120	0,130	0,125
$h(6)$	0,300	0,270	0,280	0,280	0,2765

   a) Weshalb ist ein solcher Würfel für Gesellschaftsspiele wie beispielsweise *Mensch ärgere Dich nicht* ungeeignet?
   b) Welche Werte müssten die relativen Häufigkeiten bei einem geeigneten Würfel besitzen?
   c) Mit welcher Anzahl von Sechsen kann man gemäß obiger Tabelle bei dem betrachteten Würfel in einer Serie von 5000 Würfen rechnen?
   Wodurch ist diese Annahme gerechtfertigt?