7

Modellieren

Modellieren heißt, Problemstellungen aus der Realität in vereinfachter Form durch Funktionen zu erfassen, in mathematische Problemstellungen zu transformieren und die erhaltenen Ergebnisse in Bezug auf die Realität kritisch zu hinterfragen.

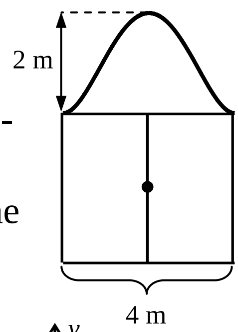
7.1 Profile

Mithilfe von Funktionen lassen sich Umrisse oder Randkurven von Objekten (Profile) des Alltags beschreiben. Mögliche Fragestellungen sollen im Folgenden exemplarisch aufgegriffen werden.

Beschreibung von Profilen mithilfe ganzrationaler Funktionen

Beispiel (Torbogen)

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion, welche die Oberkante des skizzierten Eingangstores beschreibt.



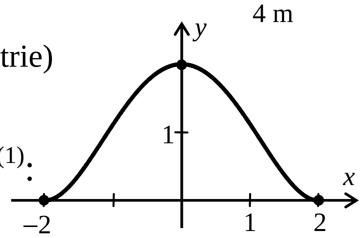
Wir führen ein Koordinatensystem ein, wie in der zweiten Abbildung dargestellt. Dabei ist die Achsensymmetrie berücksichtigt.

Es treten drei Extrema auf. Wir wählen deshalb als Ansatz eine ganzrationale Funktion vierten Grades.

Ansatz: $f(x) = a x^4 + b x^2 + c$

(nur gerade Exponenten wegen der Achsensymmetrie)

Ableitung: $f'(x) = 4a x^3 + 2b x$



Aus der Abbildung ergeben sich folgende Bedingungen[(1)]:

- y-Achsenabschnitt 2
  $f(0) = 2 \;\Leftrightarrow\; c = 2$
- 2 ist Extremstelle
  $f'(2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 32a + 4b = 0$
  $\Leftrightarrow\; 8a + b = 0$ (I)
- 2 ist Nullstelle
  $f(2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 16a + 4b + 2 = 0$
  $\Leftrightarrow\; 8a + 2b = -1$ (II)

Gleichungssystem:

(I) $8a + b = 0$

(II) $8a + 2b = -1$

Lösung des Systems:

(II) − (I): $b = -1$

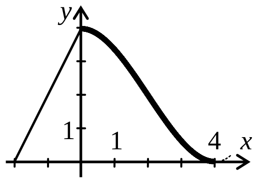
in (I): $8a - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{1}{8}$

Die gesuchte ganzrationale Funktion hat die Gleichung $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$.

(1) Die notwendige Bedingung $f'(0) = 0$ liefert bei dem hier gewählten symmetrischen Ansatz keine verwertbare zusätzliche Information.

Beispiel (Spielplatzrutsche)

Das Bild rechts zeigt den Entwurf einer Metallrutsche für Spielplätze. Das seitliche Profil der Rutsche soll durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion beschrieben werden und durch deren Extrempunkte begrenzt sein.



① *Gesucht ist eine Gleichung der zugehörigen ganzrationalen Funktion.*

Da gemäß der Abbildung zwei Extrema auftreten, wählen wir einen Ansatz mit einer ganzrationalen Funktion dritten Grades.

Ansatz: $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

Ableitungen: $f'(x) = 3a\,x^2 + 2b\,x + c$ und $f''(x) = 6a\,x + 2b$

Aus der Abbildung ergeben sich folgende Bedingungen:

- y-Achsenabschnitt 4
  $f(0) = 4 \Leftrightarrow d = 4$
- 0 ist Extremstelle
  $f'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$
- 4 ist Extremstelle
  $f'(4) = 0 \Leftrightarrow 48a + 8b = 0$
  $\Leftrightarrow 6a + b = 0$ (I)
- 4 ist Nullstelle
  $f(4) = 0 \Leftrightarrow 64a + 16b + 4 = 0$
  $\Leftrightarrow 16a + 4b = -1$ (II)

Wir verwenden die Ergebnisse $d = 4$ und $c = 0$ bei den folgenden Bedingungen.

Gleichungssystem:
(I) $6a + b = 0$
(II) $16a + 4b = -1$

Lösung des Systems:

(II) − 4 · (I): $-8a = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$

in (I): $6 \cdot \frac{1}{8} + b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{3}{4}$

Die gesuchte ganzrationale Funktion hat die Gleichung $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$.

② *Der TÜV fordert von den Herstellern, dass Rutschen auf Kinderspielplätzen an keiner Stelle steiler sein dürfen als 50° gegen die Horizontale.*
Entspricht die Rutsche dieser Anforderung?

Die steilste Stelle der Rutsche liegt an der Wendestelle der Funktion f vor.

Für die Steigung an der Wendestelle $x = 2$ ergibt sich:

$$f'(2) = 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot 4 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 2 = -\frac{3}{2}.$$

Für das Maß des Winkels gegen die Horizontale ergibt sich dann:

$$\tan(\alpha) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha \approx -56{,}31°.$$

Wendestellenuntersuchung

- Notwendige Bedingung
  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{1}{8} \cdot x + 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 0$
  $\Leftrightarrow \frac{3}{4}x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 2$
- Hinreichende Bedingung
  $x = 2$ ist eine einfache Nullstelle von f'' mit Vorzeichenwechsel. Daher liegt eine Wendestelle vor.

Die Anforderungen des TÜV werden damit nicht eingehalten.

Beschreibung von Profilen mithilfe von e-Funktionen

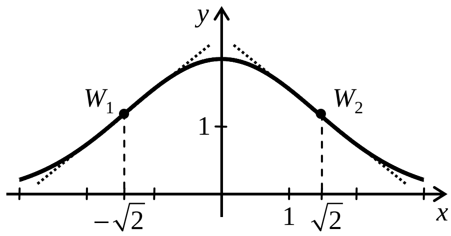
Beispiel (Fledermausgaube)

Als Fledermausgaube bezeichnet man eine Dachöffnung, die in eine Dachfläche eingebunden wird. Die abgebildete Gaube ist an ihrer Unterseite 6 m breit.

① **Oberes Randprofil**

Das obere Randprofil kann über dem Intervall [–3 ; 3] beschrieben werden durch eine e-Funktion der Form

$$f(x) = 2 \cdot e^{-0,25 \cdot x^2}.$$



a) *Wie hoch ist die Gaube an ihrer höchsten* Stelle?

Gemäß der Abbildung nimmt die Funktion f ihren maximalen Wert an der Stelle $x = 0$ mit $f(0) = 2$ an. Die Gaube ist demnach an ihrer höchsten Stelle 2 m hoch.

Rechnerische Bestätigung
Ableitung

$$f'(x) = 2 \cdot e^{-0,25 \cdot x^2} \cdot (-0,25 \cdot 2x)$$
$$= -x \cdot e^{-0,25 \cdot x^2}$$

- Notwendige Bedingung
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Hinreichende Bedingung
  Die Stelle $x = 0$ ist einfache Nullstelle von f' mit VzW von – nach +, also eine lokale Maximumstelle von f.

b) *An welchen Stellen ist das Profil am steilsten. Wie groß ist an diesen Stellen der Steigungswinkel?*

Bei den gesuchten Stellen handelt es sich um die Wendestellen von G_f .

- Steilste Stellen
  Die steilsten Stellen des Profils liegen an den Wendestellen $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ vor.
- Steigungswinkel
  Steigung an der Stelle $\sqrt{2}$:
  $$f'(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 2} \approx -0,8578$$
  Für das Maß des Steigungswinkels ergibt sich damit:
  $\tan(\alpha) = -0,8578 \Leftrightarrow \alpha \approx -40,62°$.
  Aus Symmetriegründen besitzt der Steigungswinkel an der Stelle $-\sqrt{2}$ den Wert $+40,62°$.

Wendestellenuntersuchung
Zweite Ableitung

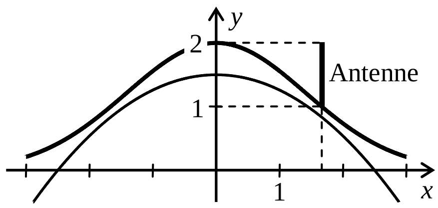
$$f''(x)$$
$$= -1 \cdot e^{-0,25 \cdot x^2} - x \cdot e^{-0,25 \cdot x^2} \cdot (-0,25 \cdot 2x)$$
$$= (-1 + 0,5 \cdot x^2) \cdot e^{-0,25 \cdot x^2}$$
$$= 0,5 \cdot (x^2 - 2) \cdot e^{-0,25 \cdot x^2}$$

- Notwendige Bedingung
  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$
  $\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$
- Hinreichende Bedingung
  Da es sich um einfache Nullstellen von f'' mit Vorzeichenwechsel handelt, liegen Wendestellen vor.

② **Parabelförmiges Fenster**

Die Gaube besitzt ein parabelförmiges Fenster. Es ist 5 m breit und 1,5 m hoch.

a) *Wie lautet eine Gleichung der zugehörigen Fensterparabel?*



Aus Symmetriegründen ist der Ansatz

$$p(x) = -a \cdot x^2 + 1{,}5$$

sinnvoll. Dabei ist die Höhe schon berücksichtigt.

Aus der Angabe der Breite ergibt sich, dass $x = 2{,}5$ eine Nullstelle ist.

Also gilt: $p(2{,}5) = 0 \Leftrightarrow -a \cdot 2{,}5^2 + 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow 6{,}25a = 1{,}5 \Leftrightarrow a = 0{,}24$.

Die gesuchte Gleichung lautet somit: $f(x) = -0{,}24 \cdot x^2 + 1{,}5$.

b) *Wie groß ist die Glasfläche des Fensters?*

Sieht man von den Holzleisten des Fensters einmal ab, so ergibt sich die gesuchte Glasfläche als Fläche unterhalb der Parabel über dem Intervall von –2,5 bis 2,5. Aus Symmetriegründen ergibt sich:

$$\mu(A) = 2 \cdot \int_0^{2{,}5} (-0{,}24 \cdot x^2 + 1{,}5)\,dx = 2 \cdot \left[-0{,}08 \cdot x^3 + 1{,}5 \cdot x\right]_0^{2{,}5}$$

$$= 2 \cdot (-0{,}08 \cdot 2{,}5^3 + 1{,}5 \cdot 2{,}5) = 5 \text{ (in m}^2\text{)}.$$

Die Glasfläche des Fensters hat den Inhalt $5\,\text{m}^2$.

③ **Antenne**

Am Rand der Gaube soll eine Antenne der Höhe 1m angebracht werden. Sie soll die Gaubenspitze nicht überragen. In welchem Bereich kann sie aufgestellt werden?

Die Antenne lässt sich gemäß der gegebenen Vorschrift gerade noch an Stellen x aufstellen, für die $f(x) = 1$ gilt.

Aus dieser Bedingung ist die Grenzlage x berechenbar.

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot x^2} = 1 \qquad | :2 ;\ \ln$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 = \ln(0{,}5)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 = -\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \cdot \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \cdot \sqrt{\ln(2)} \approx -1{,}67 \ \vee\ x = 2 \cdot \sqrt{\ln(2)} \approx 1{,}67$$

Die Antenne kann im Bereich [1,67 m ; 3 m] und aus Symmetriegründen auch im Bereich [–3 m ; –1,67 m] aufgestellt werden.