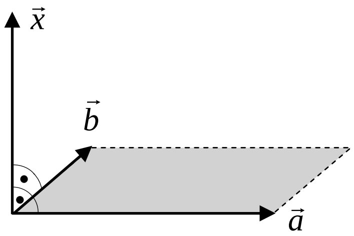
### 16.4.6 Das Vektorprodukt

**Definition des Vektorprodukts**

Wir betrachten im dreidimensionalen Raum zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.




Gesucht ist ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, der auf jedem der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht, für den also gilt:

$$\vec{a} \perp \vec{x} \text{ und } \vec{b} \perp \vec{x}.$$

Die Aufgabe ist nicht eindeutig lösbar, da die Länge und auch die Richtung des Lösungsvektors nicht eindeutig bestimmt sind. Die Abbildung zeigt nur einen möglichen von den unendlich vielen Lösungsvektoren. Selbst unter den Vektoren der Länge 1 gibt es noch zwei entgegengesetzt gerichtete Lösungsvektoren.

Die beiden Orthogonalitätsbedingungen bedeuten $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$ und $\vec{b} \cdot \vec{x} = 0$.

Sie führen zu dem Gleichungssystem $\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 & = & 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 & = & 0 \end{cases}$

Nachweis 16.4.6 a

Eine Lösung dieses Gleichungssystems ist der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$.

Man definiert:

**Vektorprodukt**

Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ heißt der Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \text{ (lies: a Kreuz b)}$$

das **Vektorprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Hierbei ist zu beachten:

- Das Vektorprodukt ist nur für Vektoren des $\mathbb{R}^3$ definiert, nicht für Vektoren des $\mathbb{R}^2$.
- Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist wieder ein Vektor. Der Name Vektorprodukt leitet sich wie auch beim Skalarprodukt vom Ergebnis her ab.
- Die obige Definition bezieht den Nullvektor und auch den Fall ein, dass die beiden Vektoren kollinear sind. Es bleibt zu klären, welche Bedeutung dem Vektorprodukt in diesen Fällen zukommt.

Die Komponenten von $\vec{a} \times \vec{b}$ sehen etwas kompliziert aus und lassen sich nicht so leicht merken. Hier kann z.B. das nachfolgend dargestellte Schema helfen.

- Man schreibt die ersten beiden Zeilen noch einmal unter das Produkt und streicht dann die erste Zeile.
- Die Komponenten von $\vec{a} \times \vec{b}$ ergeben sich, wenn man, wie im Rechenschema dargestellt, über Kreuz rechnet.

$$\begin{array}{ccc} \cancel{a_1} & & \cancel{b_1} \\ a_2 & \times & b_2 \\ a_3 & & b_3 \\ a_1 & & b_1 \\ a_2 & & b_2 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} - \\ + \end{array}$$

Dieses Rechenschema erklärt, dass man statt Vektorprodukt häufig als Synonym auch die Bezeichnung **Kreuzprodukt** verwendet.

**Beispiel (Vektorprodukt berechnen)**

Berechnet werden soll das Vektorprodukt von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) & - & 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 7 & - & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 & - & 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Merkschema:

$$\begin{array}{ccc} \cancel{3} & & \cancel{7} \\ 1 & \times & 4 \\ 0 & & -1 \\ 3 & & 7 \\ 1 & & 4 \end{array}$$

Zur Kontrolle kann man nachrechnen, dass der berechnete Vektor $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

orthogonal zu jedem der gegebenen Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist:

- $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 = -3 + 3 + 0 = 0$
- $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 7 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = -7 + 12 - 5 = 0$

### Rechenregeln für das Vektorprodukt

Wie beim Skalarprodukt lassen sich auch aus der Definition des Vektorprodukts Rechenregeln ableiten. Sie sind nachfolgend in einer Übersicht zusammengefasst.

**Rechenregeln für das Vektorprodukt**

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

Nachweis 16.4.6 b

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (Antisymmetrie)

(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgesetz)

(3) $(\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ (Verträglichkeit mit S-Multiplikat.)

(4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

## Aufgaben

81. Berechnen Sie die Vektorprodukte.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

82. Errechnen Sie einen Vektor, der zum Vektor $\vec{a}$ und auch zum Vektor $\vec{b}$ orthogonal ist. Bestätigen Sie die Orthogonalität anschließend rechnerisch.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

83. Berechnen Sie zunächst $\vec{a} \times \vec{b}$ und dann $\vec{b} \times \vec{a}$.
Welche Eigenschaft des Vektorprodukts ergibt sich?

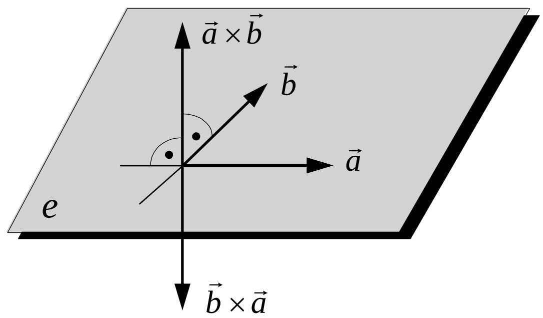
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Orientierung des Vektorprodukts

Für das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a} \text{ und } (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}.$$

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht somit senkrecht auf der von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene *e*.




Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ wird auch als ein **Normalenvektor** zu der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene *e* bezeichnet. Das Wort „normal“ leitet sich aus dem Lateinischen „normalis“ ab und bedeutet soviel wie „der Norm entsprechend“ oder „im rechten Winkel gemacht“.

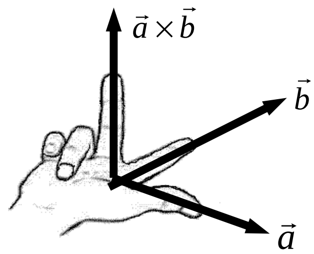
Es bleibt noch zu klären, wie sich die Orientierung des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ zu der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene bestimmen lässt.

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge, ebenso wie die Koordinatenachsen unseres Koordinatensystems, ein **Rechtssystem**. Für diesen Sachverhalt gibt es zwei Merkregeln, die insbesondere auch in der Physik verwendet werden.

- **Rechte-Hand-Regel**

  Die Richtung des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ lässt sich mit dieser Regel wie folgt bestimmen:

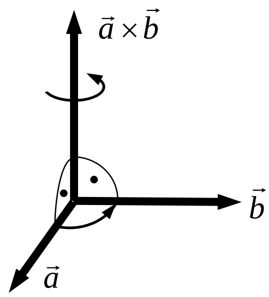
  | |
  |---|
  | *Wenn der Daumen der gespreizten rechten Hand in Richtung von $\vec{a}$ und der Zeigefinger in Richtung von $\vec{b}$ zeigt, dann zeigt der Mittelfinger, wenn er auf der von Daumen und Zeigefinger aufgespannten Ebene senkrecht steht, in Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$.* |




- **Schraubenregel**

  Die Richtung des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ lässt sich mit dieser Regel wie folgt bestimmen:

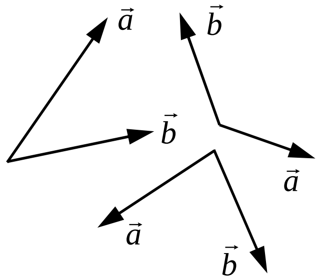
  | |
  |---|
  | *Dreht man $\vec{a}$ über den kleineren Winkel in die Richtung und Orientierung von $\vec{b}$, dann entsteht dabei eine Drehrichtung, die – auf eine normale Schraube angewandt – diese Schraube in die Richtung und Orientierung von $\vec{a} \times \vec{b}$ bewegen würde.* |



## Aufgaben

84. Gegeben sind Pfeile von Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Zeichenebene.

Übertragen Sie die Skizze ins Heft und zeichnen Sie die Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$ durch ● oder × ein, je nachdem, ob die Pfeile von $\vec{a} \times \vec{b}$ aus der Zeichenebene heraus oder aber in die Zeichenebene hinein zeigen.




85. Entscheiden Sie, ob die dargestellten Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden.

a) b) c)

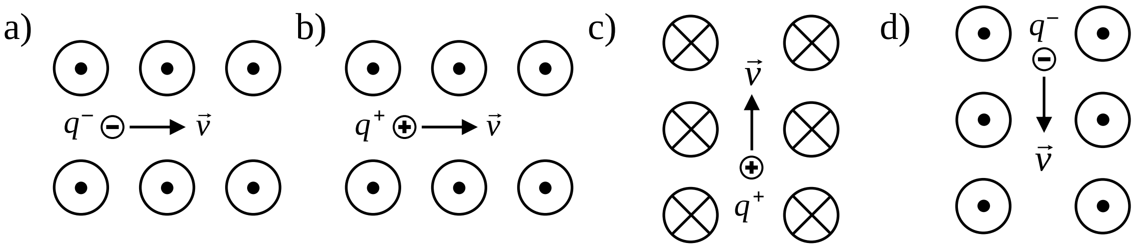
86.* Ein Magnetfeld mit der Flussdichte $\vec{B}$ übt auf ein mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegtes Teilchen, das die Ladung $q$ trägt, die Kraft

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

aus. Man bezeichnet diese Kraft als **Lorentz-Kraft**.

Dabei ist das Vorzeichen der Ladung $q$ zu berücksichtigen.

In welcher Richtung wirkt in den folgenden Abbildungen die Lorentz-Kraft?




$\odot$ bedeutet, dass die Flussdichte $\vec{B}$ aus der Zeichenebene heraus zeigt.

$\otimes$ bedeutet, dass die Flussdichte $\vec{B}$ in die Zeichenebene hinein zeigt.

87.* Das Drehmoment $\vec{M}$ kann als Vektorprodukt in der Form $\vec{M} = \vec{a} \times \vec{F}$ beschrieben werden.

Erläutern Sie die Bedeutung des Begriffs Drehmoment und die Bedeutung der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{F}$ (*Internetrecherche oder Literaturstudium*).

## Flächeninhalt von Parallelogramm und Dreieck

Für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ des $\mathbb{R}^3$ ist $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Vektor, der sowohl senkrecht zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ ist. Neben dieser besonderen Auszeichnung der Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$ hat auch der Betrag $|\vec{a} \times \vec{b}|$ eine bemerkenswerte geometrische Bedeutung. Eine etwas aufwendige Rechnung führt zu folgender Darstellung für $|\vec{a} \times \vec{b}|$:

**Komponentenfreie Darstellung des Betrags des Vektorprodukts**

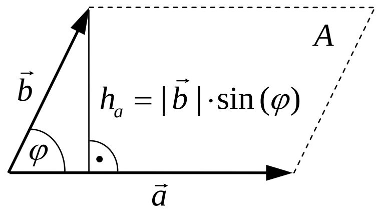
Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beliebige Vektoren des $\mathbb{R}^3$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, so gilt

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi),$$

wobei $\varphi$ das Maß des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Nachweis 16.4.6 c

Diese komponentenfreie Darstellung lässt sich auch geometrisch interpretieren.
In dem von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm ist die Höhe $h_a$ auf die Grundseite gegeben durch $h_a = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$.



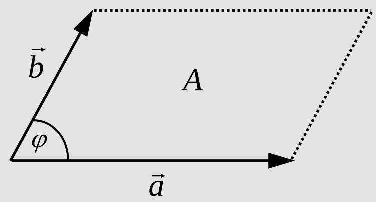

Für den Flächeninhalt des Parallelogramms ergibt sich damit:

$$\mu(A) = \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = |\vec{a}| \cdot h_a = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

**Flächeninhalt von Parallelogramm und Dreieck**

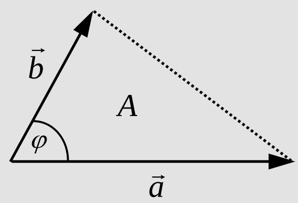
Für den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum aufgespannten Parallelogramms gilt:

$$\mu(A) = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$




Ein von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum erzeugtes Dreieck besitzt den Flächeninhalt:

$$\mu(A) = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|.$$




**Beispiel (Flächeninhalt eines Parallelogramms berechnen)**

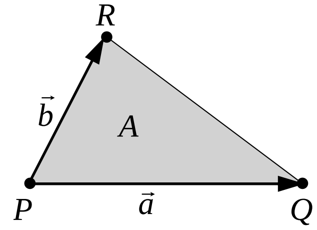
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf mit dem Flächeninhalt:

$$\mu(A) = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{11} \approx 3{,}32.$$

**Beispiel (Flächeninhalt eines Dreiecks berechnen)**
Gegeben sind die Punkte $P(1|-2|1)$, $Q(-1|0|2)$ und $R(-3|3|1)$.

Es gilt: $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.




Für den Flächeninhalt des Dreiecks $PQR$ folgt:

$$\mu(A) = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{45} \approx 3{,}35.$$

## Aufgaben

88. Begründen Sie: Ein von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugtes Dreieck besitzt den Flächeninhalt $\mu(A) = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$.

89. Gegeben sind $A(-1|-3|6)$, $B(5|-1|8)$, $C(3|5|-2)$ und $D(-3|3|-4)$.
    a) Zeigen Sie, dass das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm ist.
    b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms *ABCD*.

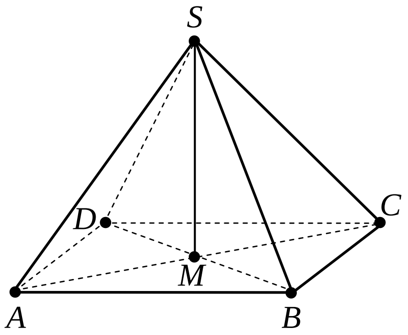
90. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*.
    a) $A(1|-1|7)$, $B(1|5|11)$ und $C(3|4|-5)$
    b) $A(8|0|2)$, $B(7|7|2)$ und $C(3|6|9)$

91. Gegeben sind die Punkte $A(1|1|0)$, $B(0|3|1)$ und $C(-2|4|4)$.
    a) Bestimmen Sie den Punkt *D* so, dass das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm ist.
    b) Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Diagonalen?
    c) Welchen Flächeninhalt hat das Parallelogramm?

92. Gegeben sind die Eckpunkte $A(2|1|-1)$, $B(0|3|-2)$ und $C(1|2|0)$ eines Dreiecks.
    a) Berechnen Sie die Längen der Seiten, die Maße der Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks.
    b) Berechnen Sie mithilfe des Flächeninhalts die Länge der Dreieckshöhen.

93. Gegeben sind die Punkte $A(5|6|1)$, $B(2|6|1)$, $C(0|2|1)$, $D(3|2|1)$ sowie $S(2{,}5|4|5)$.

Das Viereck $ABCD$ ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S$.




a) Welche Länge besitzt die Seitenkante $\overline{BS}$?

b) Weisen Sie nach, dass es sich bei dem Viereck $ABCD$ um ein Parallelogramm handelt.

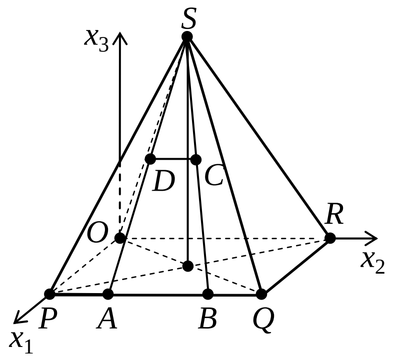
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunkts $M$.

e) Welche Höhe besitzt die Pyramide? Welcher Wert ergibt sich damit für das Volumen der Pyramide?

94. Die Abbildung zeigt ein Zelt mit der Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge 2 m und der Spitze $S$ in 2 m Höhe über dem Mittelpunkt der Grundfläche.

In der Vorderfläche $PQS$ befindet sich die trapezförmige Einstiegsöffnung $ABCD$.
Dabei sind $C$ und $D$ die Mittelpunkte der Strecken $\overline{BS}$ bzw. $\overline{AS}$. Die Strecken $\overline{PA}$ und $\overline{BQ}$ haben jeweils die Länge 0,5 m.



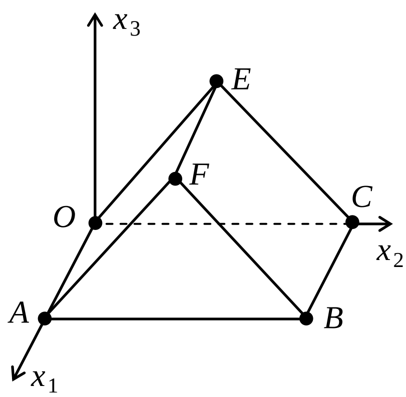

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ und $S$.

b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Einstiegsöffnung.

95. Gegeben sind die Punkte $A(6|0|0)$, $C(0|6|0)$ und $F(6|3|3)$.

Die Punkte $A$, $B$, $C$ und der Ursprung $O$ legen ein Rechteck fest.
Zusammen mit den Punkten $E$ und $F$ wird ein Dachstuhl beschrieben.




a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dachbodens.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Seitenflächen des Dachstuhls.

c) Berechnen Sie das Volumen des Dachstuhls.