

Finanzmathematische Modelle

Zum Zeitpunkt der Erstellung dieses Kapitels Anfang 2017 war das absolute Zinstief. Bei Guthabenzinssätzen in der Größenordnung von 0,1 % macht die Betrachtung vieler ansonsten wichtiger finanzmathematischer Probleme keinen Sinn.

*Aus diesem Grund und in der Hoffnung auf andere Zeiten haben sich die Verfasser entschlossen, die Beispiele und Aufgaben mit **zur Zeit** unrealistischen Zinssätzen zu versehen.*

15.1 Zins- und Zinseszinsmodelle

15.1.1 Zinsbegriffe

Die Finanzmathematik ist eine Disziplin der angewandten Mathematik, die sich mit Themen aus dem Bereich von Finanzdienstleistern wie etwa Versicherungen oder Banken beschäftigt. Im Finanzwesen sind folgende Begriffe gebräuchlich.

Unter **Kapital** versteht man einen Geldbetrag, der angelegt oder jemand anderem überlassen wird.

Unter **Zinsen** versteht man die Gebühren, die ein Schuldner dem Gläubiger für die die leihweise Überlassung und wirtschaftliche Nutzung eines Kapitals über eine vereinbarte **Laufzeit** bezahlen muss. Die Angabe des Zinssatzes wird dabei auf eine Zeiteinheit, die sogenannte **Zinsperiode** bezogen.

Die Höhe der Zinsen ist abhängig vom Zinssatz, der Dauer der Zinsperiode und der Höhe des Kapitals. Dabei muss unterschieden werden, ob anfallende Zinsen mitverzinst werden oder nicht. Wesentlich ist auch, zu welchen Terminen ein **Zinszuschlag** erfolgt.

Im Rahmen der Zinsrechnung werden folgende Bezeichnungen und Symbole verwendet:

- **Anfangskapital** K_0 = ursprünglich angelegter Geldbetrag
- **Endkapital** K_n = Kapital am Ende der Zinsperiode
- **Zinsen** Z_j = Zinsen eines Jahres
- **Laufzeit** n
- **Zinssatz** p
- **Zinsfaktor** $i = \frac{p}{100}$

15.1.2 Jährliche Verzinsung

Einfache Zinsrechnung

Bei der **einfachen Verzinsung** werden die Zinsen am Ende eines jeden Jahres zwar gutgeschrieben, aber nicht dem zinstragenden Kapital zugeschlagen, d. h. sie werden in den Folgejahren nicht mitverzinst.

Beispiel (einfache Verzinsung)

Herr Becker leiht sich 400,00 € zu einem jährliche Zinssatz von 2 % p. a. mit einfachen Zinsen bei einer Laufzeit von 6 Jahren. Welchen Betrag muss er nach 6 Jahren zurückzahlen?

Gegeben sind: $K_0 = 400,00 \text{ €}$; $n = 5 \text{ Jahre}$; $p = 2 \%$; $i = \frac{2}{100} = 0,02$

Jeweils nach Ablauf eines Jahres ergibt sich:

- Zinsen des ersten Jahres: $Z_1 = K_0 \cdot i = 400,00 \cdot 0,02 = 8,00$
Kapital nach einem Jahr: $K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = 408,00 \text{ €}$
- Zinsen des zweiten Jahres: $Z_2 = K_0 \cdot i = 400,00 \cdot 0,02 = 8,00 \text{ €}$
Kapital nach zwei Jahren: $K_2 = (K_0 + K_0 \cdot i) + K_0 \cdot i = K_0 + K_0 \cdot 2 \cdot i = 416,00 \text{ €}$
...
- Kapital nach fünf Jahren : $K_5 = K_0 + K_0 \cdot 5 \cdot i = 440,00 \text{ €}$

Allgemein: Endkapital nach n Jahren: $K_n = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$ ¹.

Endkapital bei einfacher Verzinsung

Bei einfacher Verzinsung ergibt sich bei einem Anfangskapital K_0 , einem Zinssatz p und der Laufzeit n für das Endkapital $K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$

Aufgaben

1. Frau Schmidt will einen Kredit zu 5.000,00 € mit einfachen Zinsen in Anspruch nehmen. Der Gläubiger berechnet 2,5 % Jahreszinsen.
 - a) Welche Summe muss sie nach 5 Jahren zurückzahlen?
 - b) Welchen Betrag kann sie in Anspruch nehmen, wenn sie zum Ende des 10. Jahres 7.500,00 € zurückzahlen kann?
 - c) Berechnen Sie die Laufzeit, wenn sie 5.000,00 € in Anspruch nimmt und 8.000,00 € zurückzahlt.
 - d) Die Schuld von Frau Schmidt wächst in 4 Jahren von 6.000,00 € auf 10.000,00 €. Wie hoch ist der Zinssatz?
2. Wie viele Jahre muss ein Kapital von 2.000,00 € angelegt werden, damit es sich bei einem Zinssatz von 4,5 % p. a. vervierfacht?

¹ Die Kapitalentwicklung bildet eine arithmetische Folge (siehe Anhang): in jedem Jahr wächst die Summe um den gleichen Betrag.

Zinseszinsrechnung

Werden die Zinsen am Ende eines Jahres zum Kapital hinzuaddiert, also im folgenden Jahr mitverzinst, spricht man von **Zinseszinsen**.

Neben den bereits bekannten Bezeichnungen und Symbolen betrachtet man den

- **Aufzinsungsfaktor** $q = 1 + i$

Im Folgenden soll die Berechnung an einem Beispiel erläutert werden.

Beispiel (Zinseszins)

Ein Anfangskapital von 10.000,00 € wird 5 Jahre lang zu 2 % p. a. zinsverzinst. Am Ende eines jeden Jahres werden die Zinsen dem Kapital hinzugerechnet. Wie hoch ist das Endkapital nach 5 Jahren?

Gegeben sind: Anfangskapital $K_0 = 10.000,00 \text{ €}$,
 Gesamtlaufzeit $n = 5$ Jahre,
 Zinssatz $p = 2 \%$,
 Zinsfaktor $i = \frac{2}{100} = 0,02$
 Aufzinsungsfaktor $q = 1 + i = 1,02$

Gesucht ist: Endkapital K_5

Die Zinsen für ein Jahr erhält man, wenn man das Kapital am Anfang eines Jahres mit dem **Zinsfaktor** i multipliziert. Wenn man das Kapital am Anfang eines Jahres mit dem **Aufzinsungsfaktor** q multipliziert, erhält man das Kapital am Ende des Jahres einschließlich der Zinsen.

- Die Berechnung des Endkapitals bezeichnet man daher auch als **Aufzinsung**.
- Das Kapital am 01.01. eines Jahres ist identisch mit dem Kapital am 31.12. des Vorjahres.

Mit diesen Überlegungen gelingt die Berechnung des Kapitals nach 5 Jahren, hier in Form einer Tabelle dargestellt (alle Geldsummen in €):

| Jahr | Kapital am 01.01. | Zinsen im Jahr | Kapital am 31.12. |
|------|-------------------|----------------|-------------------|
| 1 | $K_0 = 10.000,00$ | $Z_1 = 200,00$ | $K_1 = 10.200,00$ |
| 2 | $K_1 = 10.200,00$ | $Z_2 = 204,00$ | $K_2 = 10.404,00$ |
| 3 | $K_2 = 10.404,00$ | $Z_3 = 208,08$ | $K_3 = 10.612,08$ |
| 4 | $K_3 = 10.612,08$ | $Z_4 = 212,24$ | $K_4 = 10.824,32$ |
| 5 | $K_4 = 10.824,32$ | $Z_5 = 216,49$ | $K_5 = 11.040,81$ |

Nach 5 Jahren hat sich das Anfangskapital von 10.000,00 € auf einen Betrag von 11.040,81 € erhöht.

Entsprechend zur Vorgehensweise in dem Beispiel lassen sich allgemein Formeln zur Berechnung der Zinseszinsen und des Endkapitals inklusive der Zinseszinsen herleiten¹.

| Jahr | Kapital am 01.01. | Zinsen im Jahr | Kapital am 31.12. |
|------|-------------------------------|-----------------------------------|--|
| 1 | $K_0 = \text{Anfangskapital}$ | $Z_1 = K_0 \cdot i$ | $K_1 = K_0 + K_0 \cdot i$ $= K_0 \cdot (1 + i)$ $= K_0 \cdot q^1$ |
| 2 | $K_1 = K_0 \cdot q^1$ | $Z_2 = K_0 \cdot q^1 \cdot i$ | $K_2 = K_0 \cdot q^1 + K_0 \cdot q^1 \cdot i$ $= K_0 \cdot q^1 \cdot (1 + i)$ $= K_0 \cdot q^1 \cdot q$ $= K_0 \cdot q^2$ |
| 3 | $K_2 = K_0 \cdot q^2$ | $Z_3 = K_0 \cdot q^2 \cdot i$ | $K_3 = K_0 \cdot q^3$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| n | $K_{n-1} = K_0 \cdot q^{n-1}$ | $Z_n = K_0 \cdot q^{n-1} \cdot i$ | $K_n = K_0 \cdot q^n$ |

Damit ergibt sich:

Zinseszinsrechnung

Bei der Zinseszinsrechnung sind folgende Formeln von Bedeutung:

- Berechnung des Kapitals am Ende des Jahres n : $K_n = K_0 \cdot q^n$
- Berechnung der Zinsen eines beliebigen Jahres j : $Z_j = K_0 \cdot q^{j-1} \cdot i$
(Zinsen = Kapital am Ende des Vorjahres \cdot Zinsfaktor)
- Berechnung der Zinsen über die gesamte Laufzeit: $Z = K_n - K_0$

Die Kapitalbeträge zweier aufeinander folgender Jahre unterscheiden sich durch den Faktor q . Sie stellen damit eine geometrische Folge² dar.

Die Zinseszinsformel eignet sich zur Berechnung des Endkapitals. Im Folgenden wird anhand von Beispielen erläutert, wie sich auch das Anfangskapital, die Laufzeit und der Zinssatz berechnen lassen.

¹ Vergleichen Sie dazu auch die Überlegungen in Kapitel 14.3.

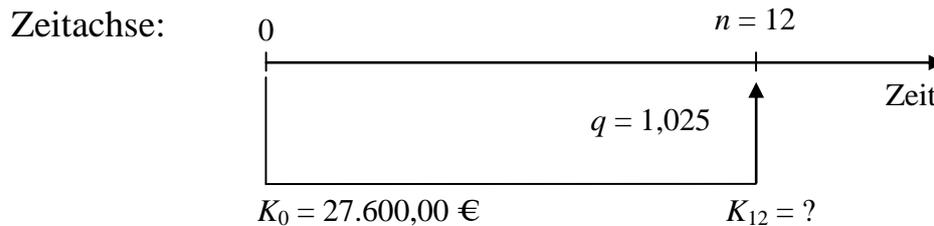
² Vergleichen Sie dazu auch Anhang 1.

Berechnung des Endkapitals

Zur Berechnung des Endkapitals werden alle gegebenen Größen in eine *Zeitachse* eingetragen und die obige Formel für das Endkapital angewendet.

Beispiel (Berechnung des Endkapitals)

Ein Betrag von 27.600,00 € wird 12 Jahre lang zu 2,5 % p. a. bei Zinsverzinsung angelegt. Wie hoch ist das Endkapital nach 12 Jahren?



Rechnung: $K_{12} = K_0 \cdot q^{12} = 27.600,00 \cdot 1,025^{12} = 37.118,93 \text{ €}$

Das Endkapital nach 12 Jahre beträgt 37.118,93 €

Für das Endkapital nach n Jahren gilt allgemein:

Zinseszinsformel zur Berechnung des Endkapitals

Bei Verzinsung mit Zinseszins ergibt sich bei einem Anfangskapital K_0 , einem Zinssatz p und der Laufzeit n für das Endkapital:

$$K_n = K_0 \cdot q^n .$$

(Endkapital = Anfangskapital · Aufzinsungsfaktor für n Jahre)

Das Endkapital ergibt sich aus dem Anfangskapital durch eine **Aufzinsung** mithilfe des Faktors q^n .

Aufgaben

3. Auf welchen Betrag wächst ein Kapital von 4.520,00 € an, wenn es 9 Jahre lang zu 4,5 % p. a. zinsverzinst wird?
4. Ein Kapital in Höhe von 5.000,00 € muss bei 6 % p. a. Zinsverzinsung 12 Jahre lang angelegt werden, damit es sich verdoppelt. Überprüfen Sie rechnerisch diese Behauptung.
5. Ein Sparbetrag von 15.000,00 € wird 15 Jahre lang zu 7 % p. a. zinsverzinst.
 - a) Wie hoch ist das Kapital nach 15 Jahren?
 - b) Wie hoch ist die Summe der Zinsen in diesen 15 Jahren?
 - c) Wie hoch sind die Zinsen des 8. Jahres?

Berechnung des Anfangskapitals

Zur Berechnung des Anfangskapitals müssen wir die Zinseszinsformel umstellen:

$$K_n = K_0 \cdot q^n \quad | : q^n$$

$$\Leftrightarrow K_0 = \frac{K_n}{q^n} = K_n \cdot \frac{1}{q^n}$$

Der Faktor $\frac{1}{q^n}$ heißt **Abzinsungsfaktor für n Jahre**.

Berechnung des Anfangskapitals

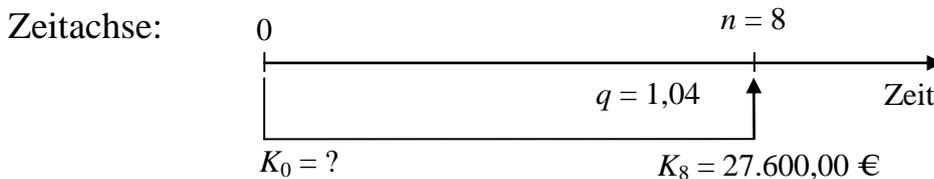
Zur Berechnung des Anfangskapitals K_0 muss man das Endkapital **abzinsen**. Man erhält das Anfangskapital, indem man das Endkapital mit dem Abzinsungsfaktor $\frac{1}{q^n}$ multipliziert:

$$K_0 = K_n \cdot \frac{1}{q^n} .$$

(Anfangskapital = Endkapital · Abzinsungsfaktor für n Jahre)

Beispiel (Berechnung des Anfangskapitals)

Ein Geldbetrag wurde 8 Jahre lang zu 4 % p. a. zinsverzinst. Wie hoch war das Anfangskapital, wenn das Endkapital 3.650,00 € beträgt?



Rechnung: $K_0 = K_8 \cdot \frac{1}{q^8} = \frac{3650}{1,04^8} = 2.666,96$

Das Anfangskapital betrug 2.666,96 €

Aufgaben

6. Welchen Betrag muss man heute bei 6,5 % p. a. Zinsverzinsung anlegen, damit man in 7 Jahren über 10.000,00 € verfügen kann?
7. Ein Anfangskapital wächst in 6 Jahren auf 7.318,04 € an. Wie hoch war es bei 12 % p. a. jährlicher Verzinsung?
8. Welchen Betrag muss ein Sparer heute bei einer Sparkasse einzahlen, wenn er bei 4,5 % p. a. Zinsverzinsung nach 8 Jahren über 20.000,00 € verfügen will?
9. Ein Unternehmen berechnet, dass in 5 Jahren eine Erweiterungsinvestition in Höhe von 76.000,00 € erforderlich sein wird. Da das laufende Geschäftsjahr mit einem Gewinn abgeschlossen hat, wird ein Teil des Gewinns zu 6 % p. a. Zinseszinsen angelegt. Wie hoch muss diese Anlage sein, damit in 5 Jahren das erforderliche Kapital zur Verfügung steht?

Berechnung der Laufzeit

Bei dieser Aufgabenstellung steht die gesuchte Größe in der Zinseszinsformel im Exponenten einer Potenz. Dies führt zu einer Exponentialgleichung, die durch Logarithmieren und Anwenden der Logarithmengesetze gelöst werden kann.

$$\begin{aligned}
 K_n &= K_0 \cdot q^n && | : K_0 \\
 \Leftrightarrow \frac{K_n}{K_0} &= q^n && | \lg \\
 \Leftrightarrow \lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right) &= \lg(q^n) \\
 \Leftrightarrow \lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right) &= n \cdot \lg(q) \\
 \Leftrightarrow \lg(K_n) - \lg(K_0) &= n \cdot \lg(q) && | : \lg(q) \neq 0 \\
 \Leftrightarrow n &= \frac{\lg(K_n) - \lg(K_0)}{\lg(q)}
 \end{aligned}$$

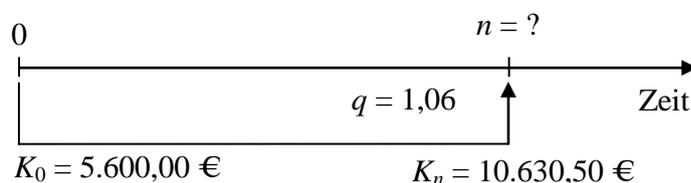
Berechnung der Laufzeit

Die Laufzeit einer Zinsverzinsung wird berechnet durch $n = \frac{\lg(K_n) - \lg(K_0)}{\lg(q)}$.

Beispiel (Berechnung der Laufzeit)

Wie viele Jahre wurden 5.600,00 € angelegt, wenn sie bei 6 % p. a. Zinsverzinsung am Ende der Laufzeit auf 10.630,48 € angewachsen sind?

Zeitachse:



Rechnung: $n = \frac{\lg(K_n) - \lg(K_0)}{\lg(q)} = \frac{\lg(10.630,50) - \lg(5.600,00)}{\lg(1,06)} = 11,004 \approx 11$ Jahre

Die Laufzeit betrug rund 11 Jahre.

Aufgaben

10. Wie viele Jahre müssen 6.340,00 € zu 4 % p. a. zinsverzinst werden, damit sie auf 8.343,00 € angewachsen?
11. Wie viele Jahre müssen 6.000,00 € bei 8 % p. a. Zinsverzinsung angelegt werden, damit sie sich verdreifachen?
12. Ein Sparbetrag von 15.000,00 € wird zu 7 % p. a. zinsverzinst. Dabei wächst er auf 29.507,27 € an.
 - a) Nach wie vielen Jahren hat der Betrag diese Höhe erreicht?
 - b) Wie hoch sind die Zinsen des 5. Jahres?

Berechnung des Zinssatzes

Bei dieser Aufgabenstellung ist die Zinseszinsformel zunächst nach dem Aufzinsungsfaktor q aufzulösen. Aus q lässt sich dann der Zinssatz p berechnen.

Die Umstellung der Zinseszinsformel nach q liefert:

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 \cdot q^n && | : K_0 \\ \Leftrightarrow q^n &= \frac{K_n}{K_0} && | \sqrt[n]{} \\ \Leftrightarrow q &= \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Zinssatz: $q = 1 + \frac{p}{100} \Leftrightarrow p = (q - 1) \cdot 100$.

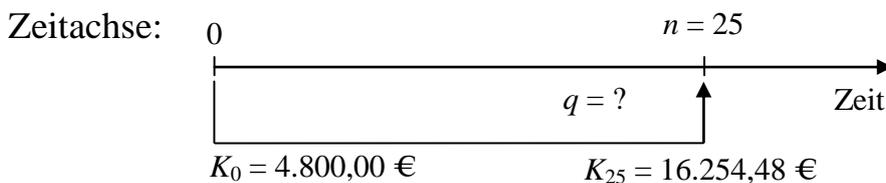
Berechnung des Zinssatzes

Der Zinssatz einer Zinsverzinsung berechnet sich mithilfe der Formeln

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad \text{und} \quad p = (q - 1) \cdot 100 .$$

Beispiel (Berechnung der Laufzeit)

Zu welchem Jahreszinssatz wurden 4.800,00 € zinsverzinst, wenn sie nach 25 Jahren auf 16.254,48 € angewachsen sind?



Rechnung: $q = \sqrt[25]{\frac{K_{25}}{K_0}} = \sqrt[25]{\frac{16.254,48}{4.800}} = 1,05$ und $p = (q - 1) \cdot 100 = (1,05 - 1) \cdot 100 = 5$.

Der Jahreszinssatz betrug 5%.

Aufgaben

13. Jemand hat bei einer Sparkasse 2.320,00 € angelegt. Welcher Zinssatz wurde vereinbart, wenn das Kapital nach 10 Jahren auf 4.154,77 € angewachsen ist?
14. Zu welchem Zinssatz müssen 8.000,00 € über 30 Jahre angelegt werden, damit sie sich verdoppeln?
15. Ein Kapital von 3.600,00 € wächst in 6 Jahren auf 7.318,04 € an. Wie hoch ist der Zinssatz?
16. Zu welchem Zinssatz müssen 30.000,00 € 30 Jahre lang angelegt werden, damit sie sich verdoppeln?
17. Leiten Sie eine Formel her, mit deren Hilfe man den Zinssatz berechnen kann, wenn ein Kapital K_0 in n Jahren auf den k -fachen Wert anwachsen soll.

Vermischte Aufgaben

18. a) Womit muss man ein Anfangskapital multiplizieren, um das zugehörige Endkapital zu erhalten?
b) Womit müssen wir ein Endkapital multiplizieren, um das zugehörige Anfangskapital zu erhalten?
c) Erklären Sie den Begriff „Zinseszinsrechnung“.
d) Lösen Sie die Formel zur Berechnung des Endkapitals allgemein nach allen Größen auf.
19. Eine Geldanlage wächst in 25 Jahren bei 6 % p. a. Zinsverzinsung auf einen Betrag von 25.000,00 € an. Wie hoch war die Anlage?
20. Bei welchem Zinssatz verdoppelt sich ein Kapital innerhalb von 9 Jahren.
21. Wie viele Jahre muss ein Kapital in Höhe von 7.000,00 € zu 5 % p. a. Zinsverzinsung angelegt sein, damit es sich verdoppelt?
22. Ein Betrag von 30.000,00 € wird eine Anzahl von Jahren zu 4 % p. a. zinsverzinst. In diesem Zeitraum wächst es auf 58.437,00 € an. Wie viele Jahre wurde der Betrag verzinst?
23. Zu welchem Zinssatz muss ein Kapital 30 Jahre lang angelegt werden, damit es sich verdreifacht?
24. Wie viele Jahre müssen 35.000,00 € zu 6 % p. a. zinsverzinst werden, damit sie auf 150.000,00 € anwachsen? Lösen Sie zuerst allgemein nach der gesuchten Größe auf.
25. Herr Meyer hat zu viel gezahlte Steuern in Höhe von 6.350,75 € vom Finanzamt erstattet bekommen. Er möchte das Geld so anlegen, dass er nach 2 Jahren insgesamt 200,00 € an Zinsen bekommt. Wie hoch müsste dazu der Zinssatz sein?
26. Herr Müller hat vor einem Jahr Aktien im Wert von 12.500,00 € gekauft. Die Jahresabrechnung zeigt, dass die Aktien um 4,5 % p. a. gestiegen sind. Die Gebühren für die Verwaltung der Aktien betragen 1,25 % p. a. des Wertes der Aktien am Jahresende.
 - a) Wie viel Gewinn hat Herr Müller vor Abzug der Gebühren gemacht?
 - b) Wie hoch sind die Gebühren?
 - c) Wie viel Euro Gewinn Herr Müller im ersten Jahr nach Abzug der Gebühren gemacht?
 - d) Um wie viel Prozent ist das Startkapital nach Abzug der Gebühren gestiegen?