3.8 Schargraphen

Begriff der Funktionenschar

Der Funktionsterm von

$$f_a(x) = ax^2 - 2x \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

enthält neben der Variablen x noch eine weitere Variable a, die man als **Formvariable** oder **Parameter** bezeichnet.

Zu jedem möglichen Wert von a gehört eine eigene Funktion. Die Menge dieser Funktionen bezeichnet man als **Funktionenschar**, die Menge ihrer Graphen als **Graphenschar**.

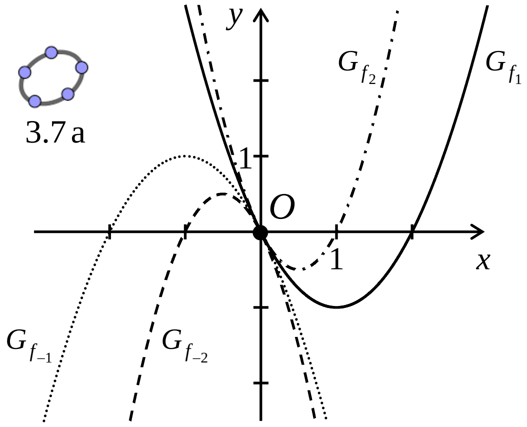
In der Abbildung sind die Graphen verschiedener Funktionen der Schar für ausgewählte Werte des Parameters a gezeichnet:

$a = -2$: $f_{-2}(x) = -2x^2 - 2x$

$a = -1$: $f_{-1}(x) = -x^2 - 2x$

$a = 1$: $f_2(x) = x^2 - 2x$

$a = 2$: $f_1(x) = 2x^2 - 2x$

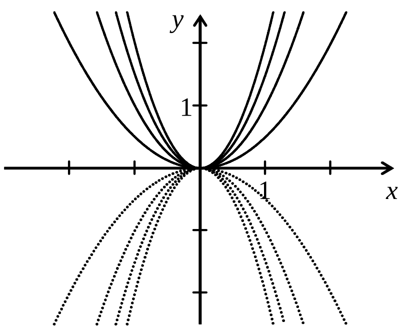


Aus der Abbildung lassen sich folgende gemeinsame Eigenschaften der einzelnen Graphen der Funktionenschar ablesen:

- Bei allen Graphen der Schar handelt es sich um eine Parabel.
- Alle Funktionen der Schar besitzen genau zwei Nullstellen.
- Dabei ist die Stelle 0 eine Nullstelle, die alle Funktionen der Schar gemeinsam haben.

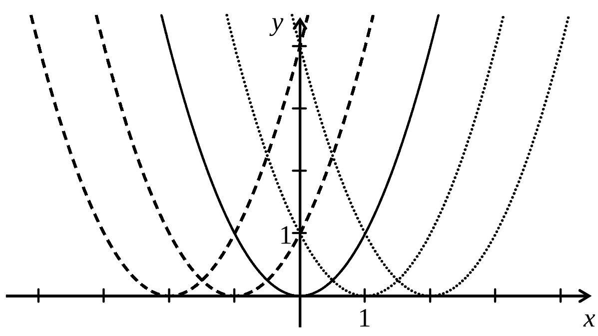
Einfache Funktionenscharen sind uns schon bei der Betrachtung der Graphen quadratischer Funktionen begegnet.

Funktionenschar: $f_a(x) = a \cdot x^2$



Graphen: gestreckte / gestauchte Normalparabeln

Funktionenschar: $f_u(x) = (x - u)^2$



Graphen: in x-Richtung verschobene Normalparabeln

Im Folgenden sind typische Fragestellungen im Zusammenhang mit Funktionenscharen anhand von Beispielen zusammengestellt.

Bestimmung einer Scharfunktion (bzw. des Parameters) aufgrund einer vorgegebenen Eigenschaft

Durch die Vorgabe einer Bedingung kann aus den Funktionen einer Schar eine bestimmte Funktion ausgewählt werden.

Beispiel (Berechnen des Parameters mithilfe einer Bedingung)

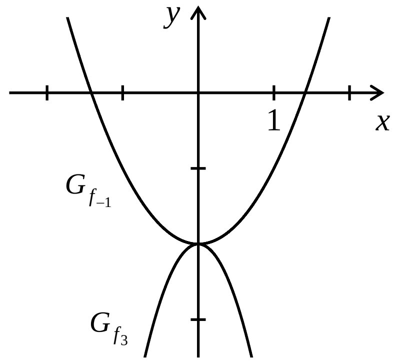
Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = -ax^2 - \frac{1}{2} \cdot (a-1)^2$ *mit* $a \in \mathbb{R}$.

Wir bestimmen $a \in \mathbb{R}$ *so, dass der Graph den y-Achsenabschnitt –2 besitzt.*

Zum y-Achsenabschnitt –2 gehört der Achsenschnittpunkt $S_y(0 \mid -2)$.
Eine Punktprobe für S_y ergibt:

3.7 b

$$\begin{aligned} f_a(0) = -2 \;&\Leftrightarrow\; 0^2 - \tfrac{1}{2} \cdot (a-1)^2 = -2 \\ &\Leftrightarrow\; (a-1)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow\; a-1 = -2 \,\vee\, a-1 = 2 \\ &\Leftrightarrow\; a = -1 \,\vee\, a = 3 \end{aligned}$$



Die gesuchten Scharfunktionen sind

$$f_{-1}(x) = x^2 - 2 \quad \text{und} \quad f_3(x) = -3x^2 - 2.$$

Nullstellen einer Scharfunktion in Abhängigkeit vom Parameter

Bei Funktionenscharen hängt die Anzahl und die Lage der Nullstellen in der Regel von dem gegebenen Parameter ab.

Beispiel (Bestimmen der Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = k\,x^2 + x - \frac{2}{k}$ *mit* $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wir bestimmen abhängig von k die Nullstellen.

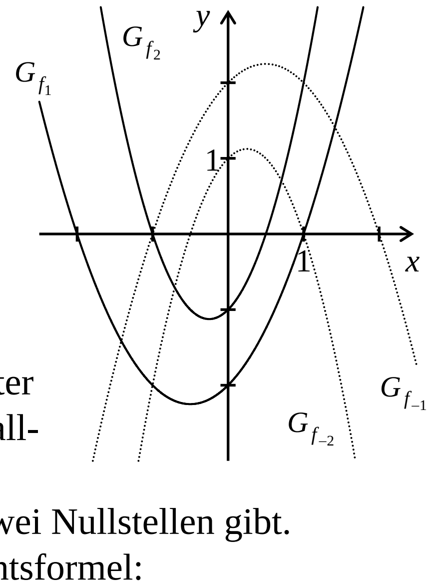
Bedingung für das Auftreten von Nullstellen:

$$f_k(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; k\,x^2 + x - \frac{2}{k} = 0.$$

3.7 c

Nach der Mitternachtsformel ergibt sich für die Diskriminante:

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot k \cdot \left(-\frac{2}{k}\right)$$
$$= 1 + 8 = 9 > 0.$$

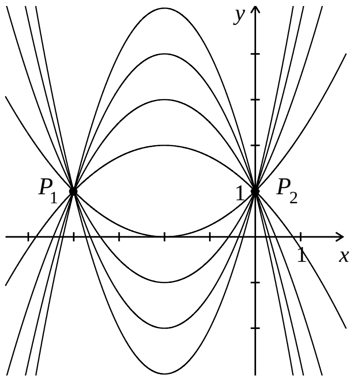


Die Diskriminante hängt nicht mehr vom Parameter k ab und ist immer positiv. Es ergibt sich keine Fallunterscheidung bezüglich k.
Dies bedeutet, dass es für alle Werte $k \neq 0$ stets zwei Nullstellen gibt.
Als Nullstellen erhält man mithilfe der Mitternachtsformel:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2k} = \frac{-1-3}{2k} = \frac{-4}{2k} = -\frac{2}{k}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2k} = \frac{-1+3}{2k} = \frac{2}{2k} = \frac{1}{k}$$

Gemeinsame Punkte aller Scharfunktionen



Bei der Funktionenschar in der Abbildung besitzen alle Graphen der Schar zwei gemeinsame Punkte.
Zur Untersuchung auf gemeinsame Punkte **aller** Funktionen einer Schar macht man den Ansatz:

$$f_a(x) = f_b(x) \quad \text{mit} \quad a \neq b \quad \text{oder} \quad a - b \neq 0\,.$$

Ein gemeinsamer Punkt aller Scharfunktionen liegt vor, wenn sich eine Schnittstelle x errechnen lässt, die unabhängig von den Parametern a und b ist.

Beispiel (Untersuchen einer Funktionenschar auf gemeinsame Punkte)
Für die Funktionenschar $f_a(x) = a\,x^2 + 4a\,x + 1$ mit $a \in \mathbb{R}$ soll untersucht werden, ob es Punkte gibt, die allen Funktionsgraphen gemeinsam sind.
Für $a \neq b$ machen wir den Ansatz:

$$
\begin{aligned}
f_a(x) = f_b(x) \quad &\Leftrightarrow \quad a\,x^2 + 4a\,x + 5 = b\,x^2 + 4bx + 5 && |-5\\
&\Leftrightarrow \quad a\,x^2 + 4a\,x = b\,x^2 + 4bx && |-b\,x^2 - 4bx\\
&\Leftrightarrow \quad a\,x^2 - b\,x^2 + 4a\,x - 4b\,x = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (a-b)\,x^2 + 4x\cdot(a-b) = 0 && (x^2 \text{ und } 4\,x \text{ ausgeklammert})\\
&\Leftrightarrow \quad (a-b)\cdot(x^2 + 4x) = 0 && ((a-b) \text{ ausgeklammert})\\
&\Leftrightarrow \quad (a-b)\cdot x\cdot(x+4) = 0 && (x \text{ ausgeklammert})\\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \;\vee\; x = -4 && (\text{Nullproduktsatz}\,;\,(a-b) \neq 0)
\end{aligned}
$$

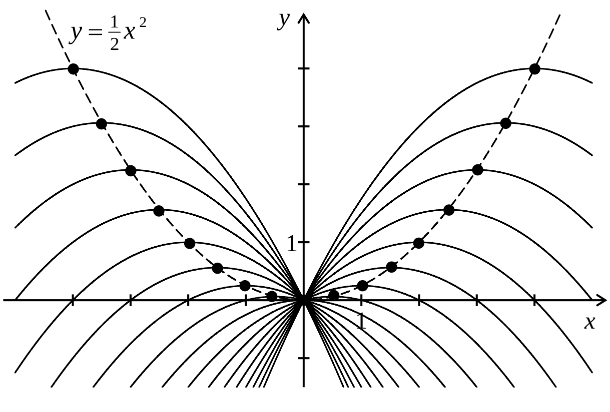
Hieraus ergeben sich $P_1(-4\,|\,1)$ und $P_2(0\,|\,1)$ als gemeinsame Punkte aller Graphen der Schar (vgl. auch Abbildung oben).

Ortskurve

Im Zusammenhang mit Funktionenscharen ergibt sich eine weitere typische Fragestellung: *Gibt es einen Graphen, auf der z.B. alle Scheitel der einzelnen Schargraphen liegen?*
Wenn dies der Fall ist, spricht man von einer **Ortslinie** oder einer **Ortskurve**.

Wir betrachten die Funktionenschar

$$f_k(x) = x\cdot(k - \tfrac{1}{4}x) \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}\,.$$



In der Abbildung ist auch die Ortslinie eingezeichnet, auf der alle Scheitelpunke der Graphenschar liegen. Es handelt sich dabei wieder um eine Parabel.
Durch $y = \frac{1}{2}x^2$ ist eine Gleichung dieser Ortslinie gegeben.
Sie soll in dem folgenden Beispiel rechnerisch bestimmt werden

Beispiel (Bestimmung der Ortskurve aller Scheitel)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x \cdot (k - \frac{1}{4}x)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Wir bestimmen die Ortskurve, auf der alle Scheitel liegen.

3.7 d

Aus der faktorisierten Funktionsgleichung lassen sich unmittelbar die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4k$ ablesen.

Die Scheitelstelle ist das arithmetische Mittel: $x_S = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2) = 2k$

Der Scheitelwert ergibt sich damit zu: $y_S = f_k(k) = 2k \cdot (k - \frac{1}{4} \cdot 2k) = k^2$

Die Scheitel abhängig von k lauten: $S_k(2k \mid k^2)$

Zu einer Gleichung der Ortkurve, auf der alle diese Scheitel liegen, kann man durch folgende Vorgehensweise gelangen:

- Man notiert den Zusammenhang zwischen dem Parameter und der x-Koordinate sowie der y-Koordinate des Scheitels je in einer Gleichung: $x = 2k$ (1) $y = k^2$ (2)
- Man löst Gleichung (1) nach dem Parameter k auf: $k = \frac{1}{2}x$
- Man setzt das Ergebnis in Gleichung (2) ein: $y = (\frac{1}{2}x)^2 = \frac{1}{4}x^2$

Die Gleichung der Ortskurve lautet damit: $y = \frac{1}{4}x^2$.

Schnittpunkte von Schargraphen

Für zwei Funktionenscharen lassen sich die möglichen Schnittpunkte berechnen. Wie üblich setzen wir dazu die Funktionsterme gleich.

Beispiel (Bestimmung der Schnittpunkte von Funktionenscharen)

Gegeben sind die Funktionenscharen $f_k(x) = kx^2 + 3kx$ *und* $g_k(x) = kx - \frac{1}{k}$ *für* $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Für welche Werte von k gibt es genau einen Schnittpunkt?*

Gleichsetzen der Funktionsterme ergibt:

$$f_k(x) = g_k(x) \Leftrightarrow \quad kx^2 + 3kx = kx - \frac{1}{k}$$

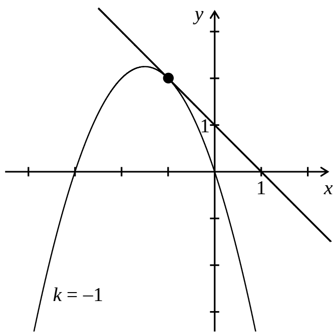
$$\Leftrightarrow kx^2 + 2kx + \frac{1}{k} = 0$$

Für die Diskriminante dieser Gleichung ergibt sich nach der Mitternachtsformel:

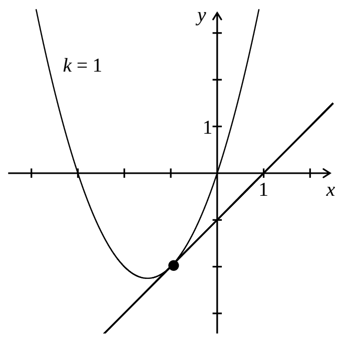
$$D = b^2 - 4ac = (2k)^2 - 4 \cdot k \cdot \frac{1}{k} = 4k^2 - 4 = 4 \cdot (k^2 - 1) = 4 \cdot (k+1) \cdot (k-1)$$

Es gibt genau eine Lösung: $D = 0 \Leftrightarrow k = -1$ oder $k = 1$.

Graphen für $k = -1$:



Graphen für $k = 1$:



Aufgaben

1. Betrachtet wird eine allgemeine quadratische Funktion mit der Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
   Zeigen Sie, dass für den Scheitel allgemein gilt: $S(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a})$
   Wandeln Sie dazu die allgemeine Form in die Scheitelform um.

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^2 + \frac{1}{12}kx + 1$ mit $k \neq 0$. Bestimmen Sie den Parameter k so, dass für $x = 0{,}75$ eine Nullstelle vorliegt.

3. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = 16x^2 - kx + 9$ mit $k \neq 0$. Bestimmen Sie den Parameter k, für den f_k genau eine Nullstelle besitzt.

4. Bestimmen Sie die Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter k.
   a) $f_k(x) = kx^2 + x + 0{,}25$ $(k \neq 0)$
   b) $f_k(x) = 2x^2 - kx - k^2$ $(k \neq 0)$
   c) $f_k(x) = x^2 + (2k-1) \cdot x + k^2$ $(k \in \mathbb{R})$

5. Untersuchen Sie die Funktionenschar auf die Existenz von Punkten, die zu allen Graphen der Schar gehören.
   a) $f_a(x) = ax^2 - 3ax + 2$ $(a \in \mathbb{R})$
   b) $f_a(x) = ax^2 - a^2$ $(a \in \mathbb{R})$

6. Berechnen Sie den Scheitel in Abhängigkeit vom Parameter. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ortskurve, auf der alle Scheitel liegen.
   a) $f_a(x) = -x^2 + 4ax$ $(a \in \mathbb{R})$
   b) $f_a(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3ax + 5a^2$ $(a \in \mathbb{R})$

7. Gegeben ist die Parabelschar $f_k(x) = \frac{1}{k} - kx^2$ mit $k > 0$.
   a) Lesen Sie den Scheitel S_k aus der Funktionsgleichung ab.
   b) Zeichnen Sie (in verschiedenen Farben) die Parabeln für $k \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2\}$.
   c) Berechnen Sie für jede Parabel die Nullstellen.

8. Gegeben ist die Parabelschar $f_k(x) = x \cdot (2k - x)$ mit $k \in \mathbb{R}$.
   a) Bestimmen Sie zu jeder Parabel den Scheitel.
   b) Zeichnen Sie die Parabeln für $k \in \{0, 1, -1, 2, -2\}$.
   c) Auf welcher Kurve liegen die Scheitel?

9. Gegeben sind die Scharen $f_a(x) = a - \frac{1}{a}x^2$ und $g_a(x) = a^3 - ax^2$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$.
   Bestimmen Sie die Schnittpunkte B_1 und B_2 der beiden Funktionsgraphen in Abhängigkeit von a.