5.3 Schnittwinkel

5.3.1 Schnittwinkel zwischen zwei Geraden

1. Gegeben sind die Geraden g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   a) Vervollständigen Sie die Berechnung des Winkels α aus dem nachstehenden Ansatz.

   $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} =$; $\alpha \approx$

   b) Begründen Sie, dass der berechnete Winkel nicht der Schnittwinkel von g_1 und g_2 ist.

   c) Wie ist der Ansatz aus a) zur Berechnung des Schnittwinkels zwischen g_1 und g_2 abzuändern?

2. Gegeben sind sich schneidende Geraden g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Kreuzen Sie die richtigen Ansätze zur Berechnung des Schnittwinkels zwischen g_1 und g_2 an. Erläutern Sie im Fall eines falschen Ansatzes den Fehler.

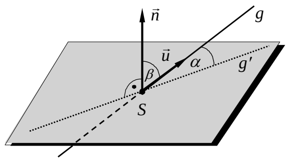
☐ $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}$	
☐ $\sin(\alpha) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}$	
☐ $\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \cos(\alpha)$	
☐ $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$	
☐ $\cos(\alpha) = \left|\dfrac{-6+1+0}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{5}}\right|$	

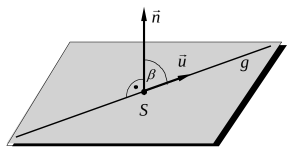
5.3.2 Schnittwinkel Gerade - Ebene

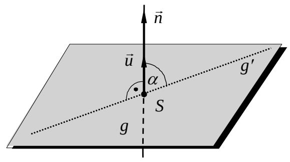
3. Gegeben sind eine Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ und eine Ebene e: $\vec{n} \cdot \vec{x} - c = 0$.

a) Betrachtet wird die Formel $\sin(\alpha) = \left| \dfrac{\vec{n} \circ \vec{u}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} \right|$. Welche Werte kann der Term $\sin(\alpha)$ gemäß dieser Formel annehmen?

b) Notieren Sie für die bildlich dargestellten Situationen jeweils die passenden Sinuswerte und Winkelmaße. Beschreiben Sie verbal die Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene e.







Sinuswert

Winkelwert

Lage

c) Welche weitere mögliche Lagebeziehung ist bildlich nicht dargestellt? Zu welchem Winkelwert gehört sie?

4. Berechnen Sie den Schnittwinkel von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit der x_1-x_2- bzw. x_1-x_3-Ebene.

- *Richtungsvektor von g* $\vec{u} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$ *Betrag* $|\vec{u}| =$
- *Normalenvektor x_1-x_2-Ebene* $\vec{n}_{12} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$ *Betrag* $|\vec{n}_{12}| =$

Winkel

Interpretation

- *Normalenvektor x_1-x_3-Ebene* $\vec{n}_{13} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$ *Betrag* $|\vec{n}_{13}| =$

Winkel

Interpretation

5.3.3 Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen

5. Betrachtet wird für e_1: $\vec{n}_1 \cdot \vec{x} = c_1$ und e_2: $\vec{n}_2 \cdot \vec{x} = c_2$ die Formel $\cos(\alpha) = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|$.

   Notieren Sie für unterschiedliche Werte des Bruchterms die zugehörige Lagebeziehung der Ebenen e_1 und e_2.

   $\left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right| = 0$

   $0 < \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right| < 1$

   $\left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right| = 1$

6. Gegeben sind Ebenen e_1: $2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1$ und e_2: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = -5$.

   Kreuzen Sie die zutreffende Lagebeziehung an. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

   - ☐ e_1 und e_2 sind echt parallel.
   - ☐ e_1 und e_2 sind identisch.
   - ☐ e_1 und e_2 schneiden sich in einem spitzen Winkel.
   - ☐ e_1 und e_2 schneiden sich senkrecht.

   Begründung

7. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Ebene e: $-2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1$ mit der x_2-x_3-Ebene.

   - *Normalenvektor von e* $\vec{n} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$ *Betrag* $|\vec{n}| =$
   - *Normalenvektor x_2-x_3-Ebene* $\vec{n}_{23} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$ *Betrag* $|\vec{n}_{23}| =$

   Winkel

   Interpretation