6.1.2 Zeichnerische Lösung linearer Gleichungssysteme

Verknüpft man zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen logisch durch die Konjunktion „*und*“, so erhält man ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen. Allgemein definiert man:

Lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen

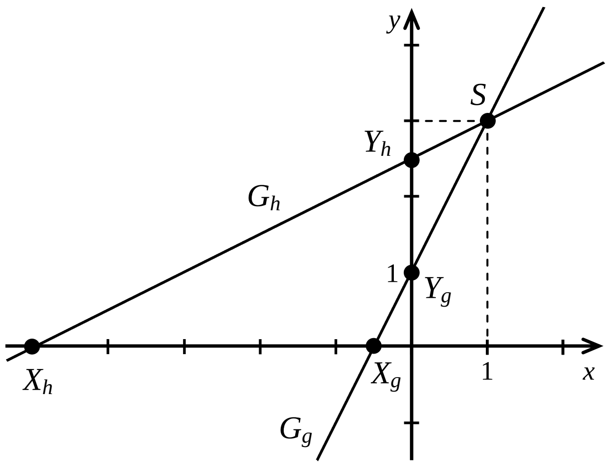
Die Aussageform $\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases}$ wird als lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen bezeichnet.[1] Die Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ heißen **Koeffizienten**, die Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ **Absolutglieder** des Systems.

Als Grundmenge für die Variablen x und y wählen wir die Menge $\mathbb{R}$.

Die Bestimmung der Lösungsmenge eines solchen Systems entspricht graphisch der Bestimmung des Schnittpunkts zweier Geraden.

Beispiel: Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{cases} -2 \cdot x + y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}.$$



Zum Zeichnen der zugehörigen Geraden bestimmen wir jeweils die beiden Achsenschnittpunkte.

1. Gleichung: Gerade g

$y = 0 \;\rightarrow\; x = -0{,}5 \qquad X_g(-0{,}5 \mid 0)$

$x = 0 \;\rightarrow\; y = 1 \qquad Y_g(0 \mid 1)$

2. Gleichung: Gerade h

$y = 0 \;\rightarrow\; x = -5 \qquad X_h(-5 \mid 0)$

$x = 0 \;\rightarrow\; y = 2{,}5 \qquad Y_h(0 \mid 2{,}5)$

Die Geraden sind in dem Koordinatensystem rechts dargestellt.

Aus der graphischen Darstellung ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden der Punkt $S(1 \mid 3)$.

Das Gleichungssystem wird gelöst durch $x = 1$ und $y = 3$.
Die Lösungsmenge ist $L = \{ (1 \mid 3) \}$.

---

[1] Wir schreiben die linearen Gleichungen untereinander. Durch die Klammer soll angedeutet werden, dass die beiden Gleichungen zusammengehören. Wenn nötig, werden die Gleichungen mit römischen Zahlzeichen nummeriert.

Aufgaben

4. Lösen Sie graphisch folgende lineare Gleichungssysteme. Zeichnen Sie die Geraden mithilfe der Achsenschnittpunkte und lesen Sie den Schnittpunkt ab.

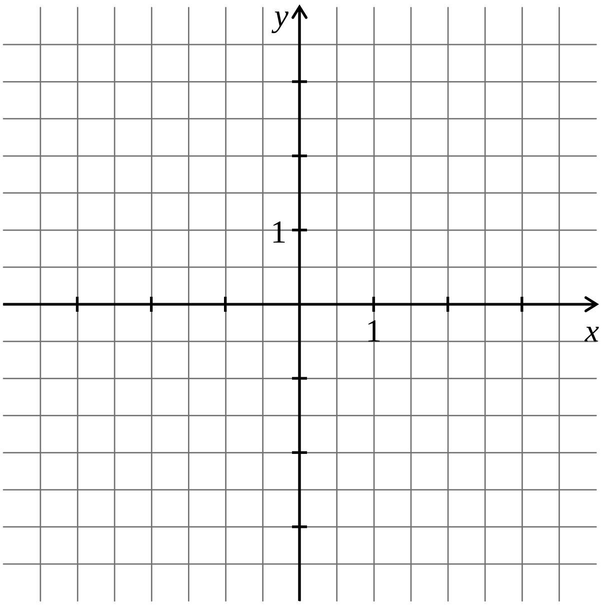
a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -3 \end{cases}$

1. Gleichung Gerade g: $y = 0 \rightarrow x =$ ___ $X_g($ ___ $|$ ___ $)$

$x = 0 \rightarrow y =$ ___ $Y_g($ ___ $|$ ___ $)$

2. Gleichung Gerade h: $y = 0 \rightarrow x =$ ___ $X_h($ ___ $|$ ___ $)$

$x = 0 \rightarrow y =$ ___ $Y_h($ ___ $|$ ___ $)$



Schnittpunkt: $S($ ___ $|$ ___ $)$

Lösungen: $x =$ ____

$y =$ ____

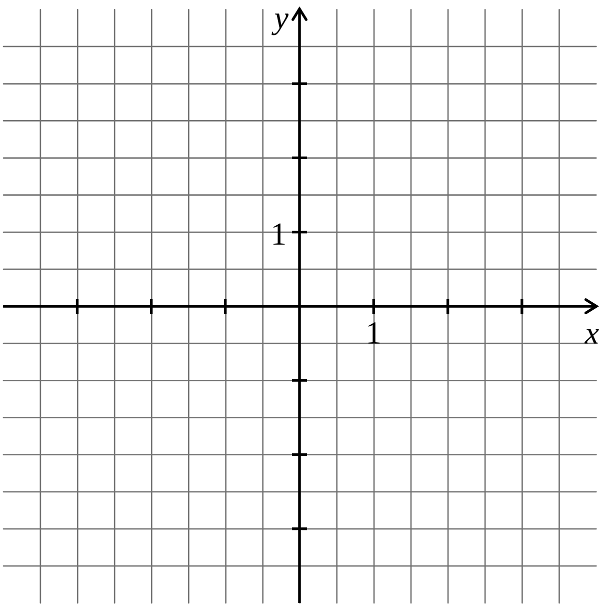
b) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$

1. Gleichung Gerade g: $y = 0 \rightarrow x =$ ___ $X_g($ ___ $|$ ___ $)$

$x = 0 \rightarrow y =$ ___ $Y_g($ ___ $|$ ___ $)$

2. Gleichung Gerade h: $y = 0 \rightarrow x =$ ___ $X_h($ ___ $|$ ___ $)$

$x = 0 \rightarrow y =$ ___ $Y_h($ ___ $|$ ___ $)$



Schnittpunkt: $S($ ___ $|$ ___ $)$

Lösungen: $x =$ ____

$y =$ ____

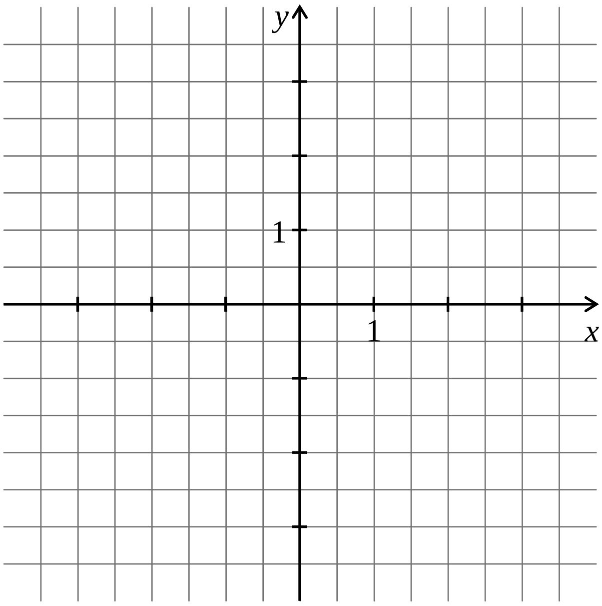
c) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ \frac{1}{2}x - y = \frac{3}{2} \end{cases}$

1. Gleichung Gerade g: $y = 0 \rightarrow x =$ ___ $X_g($ ___ | ___ $)$

$x = 0 \rightarrow y =$ ___ $Y_g($ ___ | ___ $)$

2. Gleichung Gerade h: $y = 0 \rightarrow x =$ ___ $X_h($ ___ | ___ $)$

$x = 0 \rightarrow y =$ ___ $Y_h($ ___ | ___ $)$



Schnittpunkt: $S($ ___ | ___ $)$

Lösungen: $x =$ ____

$y =$ ____

5. Ein Zahlenpaar der angegebnen Zahlenpaare erfüllt das jeweilige Gleichungssystem. Streiche das das Zahlenpaar durch, welches keine Lösung ist.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$ | (3 | 0) | (–2 | 3) |

b) $\begin{cases} y - 2x = 4 \\ y + 3x = 9 \end{cases}$ | (3 | 10) | (1 | 6) |

c) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 5y - 2x = 1 \end{cases}$ | (9 | 3) | (17 | 7) |

d) $\begin{cases} x + 0 \cdot y = 3 \\ 0 \cdot x + y = -1 \end{cases}$ | (3 | –1) | (–1 | 3) |

6. Bei den folgenden Gleichungssystemen benötigen Sie keine Zeichnung. Sie können die Lösungsmenge im Kopf bestimmen.

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ $L = \{ ($ ___ | ___ $) \}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x = -1 \end{cases}$ $L = \{ ($ ___ | ___ $) \}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3y = 6 \end{cases}$ $L = \{ ($ ___ | ___ $) \}$