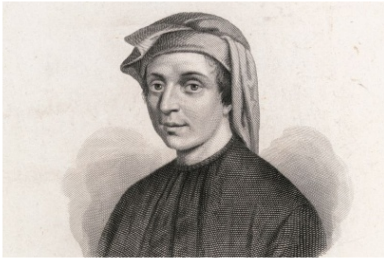
Fibonacci-Folge

(Helmut Umla MMXIX)

Aufgabe 1



Im Jahre 1202 nach Chr. erschien das Buch *Liber abaci* von Leonardo von Pisas (ca. 1170 – 1240), auch Fibonacci (Sohn des Bonacci) genannt. In diesem Buch findet man die berühmte **Kaninchen-Aufgabe**:

> *In einem abgegrenzten Gebiet befindet sich ein neugeborenes Kaninchenpaar. Nach einem Monat ist das Paar geschlechtsreif und bringt nach einem weiteren Monat monatlich ein neues Paar zur Welt. Die Nachkommen verhalten sich ebenso. Alle Kaninchen leben ewig.*

Mit f_n bezeichnen wir die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat.

a) Berechne die Zahlen f_1, f_2, f_3 und f_4.

b) Wie ergibt sich die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat ($n \geq 3$) aus der Anzahl der Kaninchenpaare in den beiden vorausgegangenen Monaten. Stelle eine *Rekursionsformel* auf.

c) Die Zahlenfolge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ heißt *Fibonacci-Folge*.
Berechne mit der Rekursionsformel die Folgenglieder bis zum Index 15.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f_n	1	1													

d) Berechne die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Glieder, also $f_1^2 + f_2^2, f_2^2 + f_3^2$ usw. Fällt dir eine Gesetzmäßigkeit auf?

e) Beweise, dass für alle $n \in \mathbf{N}^*$ gilt: $f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$

Du hast in d) für einige n die Gültigkeit der Formel nachgewiesen. Du könntest weitere Fälle überprüfen, aber so wirst du nie zum Ende kommen. Man beweist stattdessen folgende Implikation:

> *Wenn die Formel für $f_3, f_5, \ldots, f_{2n+1}$ gilt, dann gilt sie auch für das nächste Folgenglied mit ungeradem Index, d.h. $f_{2n+3} = f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2$.*

① Erläutere zunächst, wieso aus d) und der Implikation folgt, dass die Formel für alle $n \in \mathbf{N}^*$ gilt.
② Beweise die Implikation, indem Du beide Seiten von $f_{2n+3} = f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2$ so umformst, dass der gleiche Term herauskommt. Erläutere die vorgeführte Rechnung für die linke Seite und forme dann die rechte Seite selbst um.

• Linke Seite	$\begin{aligned} \boldsymbol{f_{2n+3}} &= f_{2n+2} + f_{2n+1} \\ &= f_{2n+1} + f_{2n} + f_{2n+1} \\ &= f_{2n+1} + (f_{2n+1} - f_{2n-1}) + f_{2n+1} \\ &= 3f_{2n+1} - f_{2n-1} \\ &= 3(f_n^2 + f_{n+1}^2) - (f_{n-1}^2 + f_n^2) \\ &= \boldsymbol{3f_{n+1}^2 + 2f_n^2 - f_{n-1}^2} \end{aligned}$
• Rechte Seite	Now it's your turn!

Aufgabe 2

Der Französische Mathematiker Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856) veröffentlichte 1843 eine Formel für die direkte Berechnung der Glieder der *Fibonacci-Folge*:

$$\boldsymbol{f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}$$

a) Zeige, dass die Formel für $n = 1$ und $n = 2$ stimmt. Berechne f_{10} mit Hilfe der Formel und einem Taschenrechner.

b) Wir wollen nun der Frage nachgehen, wie man diese Formel finden kann.

① Betrachte die Folgen $(a^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ mit $a \in \mathbf{R}^*$.
Zeige: Es gibt darunter zwei Folgen, welche die Rekursionsformel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ erfüllen.
Ergebnis: Es sind die Folgen (x_n) und (y_n) mit $x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ und $y_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

② Zeige, dass keine der beiden in ① gefundenen Folgen die Fibonacci-Folge ist.

③ Wir basteln aus den Folgen (x_n) und (y_n) neue Folgen (z_n) mit $z_n = \alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Zeige, dass auch diese Folgen die Rekursionsbedingung erfüllen.

④ Wie in ③ gezeigt, erfüllen die Folgen mit den Gliedern $z_n = \alpha \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ die Rekursionsbedingung, wobei α und β feste reelle Zahlen sind. Über diese Zahlen α und β kannst du noch frei verfügen. Bestimme die Zahlen so, dass die Folge (z_n) die Anfangsbedingung $z_1 = 1$ und $z_2 = 1$ erfüllt. Dann hast du die Fibonacci-Folge gefunden!

Aufgabe 3

Wir bilden mit Hilfe der Fibonacci-Zahlen die Folge $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)_{n\in N^*}$.

a) Berechne die ersten zehn Glieder der Folge. Was beobachtest du?

b) Zeige, dass für alle $n \in \mathbf{N}^*$ gilt: $\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}$

c) Berechne den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$

Lösungen

Aufgabe 1

a) Im 1. und 2. Monat ist nur das ursprüngliche Kaninchenpaar vorhanden, also $f_1 = f_2 = 1$.
Im 3. Monaten kommt ein Paar hinzu, also: $f_3 = 2$. Im 4. Monat hat das erste Paar Nachwuchs, das zweite noch nicht, also $f_4 = 3$.

b) Im n-ten Monat leben alle Kaninchenpaare des Vormonats (das sind f_{n-1} Paare), dazu kommt der Nachwuchs der Paare aus dem Vorvormonat (das sind f_{n-2} neue Paare). Somit ergibt sich für die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Jedes Folgenglied (ab $n = 3$) ist also die Summe der beiden vorangehenden. Man nennt eine Gleichung, die ein Folgenglied zu vorangehenden Gliedern in Beziehung setzt, eine *Rekursionsformel*.

c) Die ersten 15 Glieder der Fibonacci-Folge:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

d) $f_1^2 + f_2^2 = 2 = f_3; f_2^2 + f_3^2 = 5 = f_5; f_3^2 + f_4^2 = 13 = f_7; \dots; f_6^2 + f_7^2 = 233 = f_{13}$
Vermutung: $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$ (Indizes addieren)

e) ① In d) wurde gezeigt, dass die Formel für f_3 und f_5 richtig ist. Die Implikation besagt:
Wenn die Formel für f_3 und f_5 gilt, dann gilt sie auch für f_7 (nächstes Folgenglied mit ungeradem Index). Nächster Schritt: Da die Formel für f_3, f_5, f_7 gilt, gilt sie auch für f_9. Und du kannst so fortfahren: Da die Formel für f_3, f_5, f_7, f_9 gilt, gilt sie auch für f_{11} usw. Die Formel stimmt also für alle Folgenglieder mit ungeradem Index.
Die Art, wie man diese Formel für alle $n \in \mathbf{N}^*$ beweist, nennt man *Beweis durch vollständige Induktion*.

② Voraussetzung: Die Formel gilt für $f_3, \dots, f_{2n+1}$.
Behauptung: $f_{2n+3} = f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2$
Beweis: Wir formen die linke und rechte Seite so um, dass gleiche Terme herauskommen.

• L-Seite	$\boldsymbol{f_{2n+3}}$	$= f_{2n+2} + f_{2n+1}$	Rekursionsformel für f_{2n+3}
		$= f_{2n+1} + f_{2n} + f_{2n+1}$	Rekursionsformel für f_{2n+2}
		$= f_{2n+1} + (f_{2n+1} - f_{2n-1}) + f_{2n+1}$	$f_{2n} = f_{2n+1} - f_{2n-1}$
		$= 3f_{2n+1} - f_{2n-1}$	Zusammenfassen
		$= 3(f_n^2 + f_{n+1}^2) - (f_{n-1}^2 + f_n^2)$	Voraussetzung benutzen
		$= \boldsymbol{3f_{n+1}^2 + 2f_n^2 - f_{n-1}^2}$	Zusammenfassen
• R-Seite	$\boldsymbol{f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2}$	$= (f_n + f_{n-1})^2 + (f_{n+1} + f_n)^2$	Rekursionsformel
		$= f_n^2 + 2f_nf_{n-1} + f_{n-1}^2 + f_{n+1}^2 + 2f_{n+1}f_n + f_n^2$	Erste binomische Formel
		$= f_n^2 + 2(f_{n+1} - f_{n-1})f_{n-1} + f_{n-1}^2 + f_{n+1}^2 + 2f_{n+1}(f_{n+1} - f_{n-1}) + f_n^2$ (**)	
		$= f_n^2 + 2f_{n+1}f_{n-1} - 2f_{n-1}^2 + f_{n-1}^2 + f_{n+1}^2 + 2f_{n+1}^2 - 2f_{n+1}f_{n-1} + f_n^2$	
		$= \boldsymbol{3f_{n+1}^2 + 2f_n^2 - f_{n-1}^2}$	Zusammenfassen

(**) Aus $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ folgt $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$. In den gemischten Gliedern wird f_n durch $f_{n+1} - f_{n-1}$ ersetzt.

Aufgabe 2

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2\sqrt{5}}{2}=1=f_1$ ✓

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4\sqrt{5}}{4}=1=f_2$ ✓

Der Taschenrechner liefert: $f_{10}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}\right]=55$ ✓

b) ① $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \Leftrightarrow a^{n+2}=a^{n+1}+a^n \underbrace{\Leftrightarrow}_{a\neq 0} a^2=a+1$ (durch a^n dividiert)

Letzteres ist eine quadratische Gleichung, die wir durch quadratische Ergänzung lösen können:

$$a^2=a+1 \Leftrightarrow a^2-a=1 \Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ergebnis: Die beiden Folgen (x_n) und (y_n) mit $x_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ und $y_n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ erfüllen die Rekursionsbedingung.

② Es gilt: $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $y_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Die Fibonacci-Folge beginnt aber mit 1. Daher ist keine der beiden Folgen (x_n) und (y_n) die Fibonacci-Folge.

③ Wir müssen zeigen: $z_{n+2}=z_{n+1}+z_n$.

$$\begin{aligned} z_{n+2}&=\alpha\cdot x_{n+2}+\beta\cdot y_{n+2}=\alpha\cdot(x_{n+1}+x_n)+\beta\cdot(y_{n+1}+y_n)\\ &=(\alpha x_{n+1}+\beta y_{n+1})+(\alpha x_n+\beta y_n)=z_{n+1}+z_n \end{aligned}$$

④ Anfangsbedingung: Die ersten zwei Folgenglieder sollen den Wert 1haben.

$$\begin{cases} z_1=1\\ z_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\beta\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1\\ \alpha\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\beta\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\alpha\sqrt{5}+\beta-\beta\sqrt{5}=2\\ 6\alpha+2\alpha\sqrt{5}+6\beta-2\beta\sqrt{5}=4 \end{cases}$$

Subtrahiere das Doppelte der ersten Gleichung von der zweiten Gleichung.
Du erhältst: $4\alpha+4\beta=0$, also $\beta=-\alpha$.
Setze dieses Ergebnis in die erste Gleichung ein und berechne α:

$$\alpha+\alpha\sqrt{5}-\alpha+\alpha\sqrt{5}=2 \Leftrightarrow 2\alpha\sqrt{5}=2 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Damit ist die Fibonacci-Folge gefunden:

$$z_n=\alpha\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Du brauchst nur noch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{5}}$ auszuklammern.

Aufgabe 3

a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{f_{n+1}}{f_n}$	1	2	1,5	$1,\overline{6}$	1,6	1,625	1,6153…	1,6190…	1,6176…	1,6181…

Die Folge der Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen scheint für $n \to \infty$ gegen eine Zahl zwischen 1,61 und 1,62 zu streben.

b)

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}\right]}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}$$

c) Die Zahl $\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = -0{,}38\ldots$ ist betragsmäßig kleiner als 1. Daher streben ihre ganzzahligen Potenzen mit wachsendem n gegen 0. Es folgt also:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-0}{1-0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Die Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ heißt Goldener Schnitt und spielt in der Geometrie, Kunst und Architektur eine Rolle. Das ist aber eine neue Geschichte …