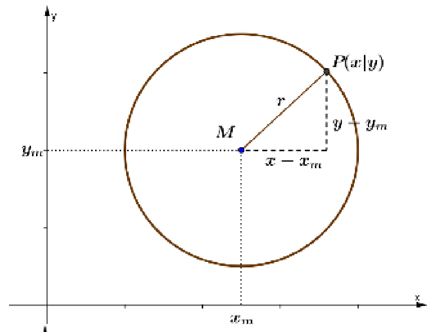
Ein Maß für die Krümmung von Funktionsgraphen

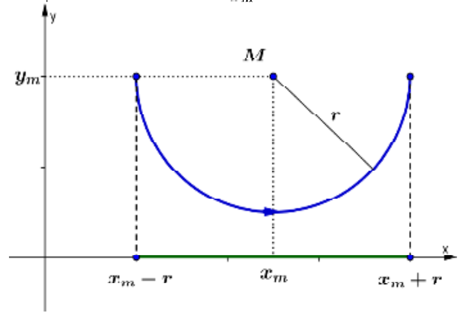
Helmut Umla 2015

• Halbkreise



Der **Kreis** mit Mittelpunkt $M(x_m|y_m)$ und Radius r hat die Gleichung $(x-x_m)^2+(y-y_m)^2=r^2$ (Satz des Pythagoras).

Die Gleichung nach y aufgelöst: $y=y_m\pm\sqrt{r^2-(x-x_m)^2}$



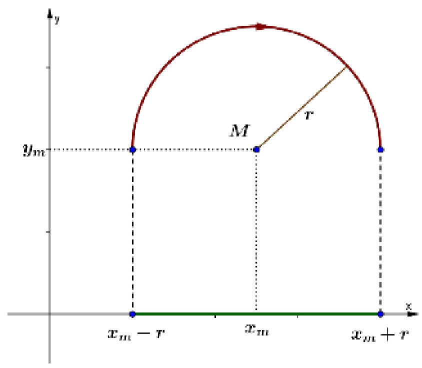
Der **untere Halbkreis** ist der Graph der Funktion
$\varphi\colon[x_m-r,x_m+r]\to\mathbf{R}$ mit $\varphi(x)=y_m-\sqrt{r^2-(x-x_m)^2}$.

Zur Berechnung der Ableitungen von φ benötigt man die *Kettenregel*; nach einiger Rechnung erhält man für $x\in\,]x_m-r,x_m+r[$:

$$\varphi'(x)=\frac{x-x_m}{(r^2-(x-x_m)^2)^{\frac{1}{2}}}\quad\text{und}\quad\varphi''(x)=\frac{r^2}{(r^2-(x-x_m)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\varphi''(x)>0$ in $]x_m-r,x_m+r[$, d.h. der untere Halbkreis ist linksgekrümmt (in Übereinstimmung mit der Anschauung).

Wie eine Gerade eine konstante Steigung hat, so hat ein unterer Halbkreis eine konstante Krümmung. Diese ist um so kleiner, je größer der Radius r des Kreises ist. Daher hat man festgelegt:
Ein unterer Halbkreis mit Radius r hat die Krümmung $\kappa:=\frac{1}{r}$ (κ = Kappa, griech. Buchstabe).



Der **obere Halbkreis** ist der Graph der Funktion
$\varphi\colon[x_m-r,x_m+r]\to\mathbf{R}$ mit $\varphi(x)=y_m+\sqrt{r^2-(x-x_m)^2}$.

Erste und zweite Ableitung:

$$\varphi'(x)=\frac{-(x-x_m)}{(r^2-(x-x_m)^2)^{\frac{1}{2}}}\quad\text{und}\quad\varphi''(x)=\frac{-r^2}{(r^2-(x-x_m)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\varphi''(x)<0$ in $]x_m-r,x_m+r[$, d.h. der obere Halbkreis ist rechtsgekrümmt (in Übereinstimmung mit der Anschauung).

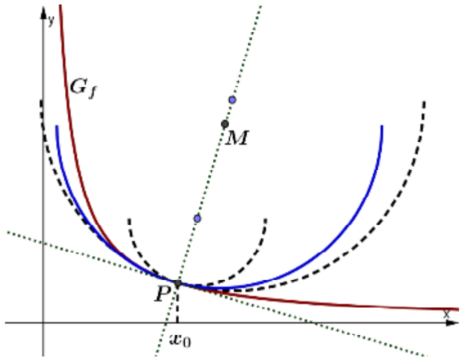
Oberer und unterer Halbkreis mit Radius r sind gleich stark gekrümmt. Da die Krümmung auch den Krümmungssinn angeben soll, legen wir fest: **Ein oberer Halbkreis mit Radius r hat die Krümmung $\kappa:=-\frac{1}{r}$.**

Zusammengefasst

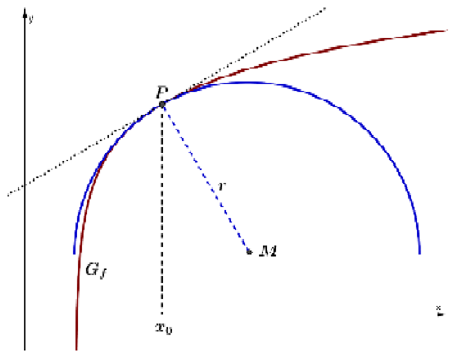
• Der Graph der Funktion $x\mapsto y_m-\sqrt{r^2-(x-x_m)^2}$ ist der untere Halbkreis mit Mittelpunkt $(x_m|y_m)$ und Radius r. Er hat die konstante **Krümmung** $\kappa:=\frac{1}{r}$.
• Der Graph der Funktion $x\mapsto y_m+\sqrt{r^2-(x-x_m)^2}$ ist der obere Halbkreis mit Mittelpunkt $(x_m|y_m)$ und Radius r. Er hat die konstante **Krümmung** $\kappa:=-\frac{1}{r}$.

• Definition eines Krümmungsmaßes

Die Krümmung eines Funktionsgraphen ist im Allgemeinen nicht konstant, sondern hängt wie die Steigung vom jeweiligen Punkt $P(x_0|f(x_0)) \in G_f$ ab. Man führt die Krümmung von Funktionsgraphen auf die Krümmung von unteren bzw. oberen Halbkreisen zurück.



Sei f eine Funktion, die in einer Umgebung von x_0 zweimal differenzierbar ist und deren Graph linksgekrümmt ist. Es gibt unendlich viele untere Halbkreise, die G_f an der Stelle x_0 berühren (vgl. Abb.). Unter diesen Halbkreisen wählen wir denjenigen aus, der Graph der Funktion ist, deren zweite Ableitung an der Stelle x_0 mit $f''(x_0)$ übereinstimmt. Die Krümmung dieses Halbkreises soll die Krümmung von G_f an der Stelle x_0 sein.



Entsprechend verfährt man, wenn der Graph von f rechtsgekrümmt ist. Diesmal wählt man die Funktion φ, deren Graph ein oberer Halbkreis ist und für die gilt:

$$\underbrace{\varphi(x_0) = f(x_0) \;\wedge\; \varphi'(x_0) = f'(x_0)}_{Berühr-Bedingung} \wedge\; \varphi''(x_0) = f''(x_0)$$

Wir legen wieder fest: Die Krümmung von G_f an der Stelle x_0 ist die Krümmung dieses Halbkreises.

Satz und Definition

Sei f eine in einer Umgebung von x_0 zweimal differenzierbare Funktion mit $f''(x_0) \neq 0$.

• Dann gibt es in der Funktionenschar $x \mapsto y_m \pm \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}$ genau eine Funktion φ, für die gilt: $\varphi(x_0) = f(x_0) \;\wedge\; \varphi'(x_0) = f'(x_0) \wedge\; \varphi''(x_0) = f''(x_0)$.

• Wir definieren: **Krümmung von $\boldsymbol{G_f}$ an der Stelle $\boldsymbol{x_0}$** $:=$ Krümmung von G_φ.

Der Kreis, dessen unterer bzw. oberer Teil der Graph von φ ist, heißt **Krümmungskreis** von G_f an der Stelle x_0.

• Beweis des Satzes und Formel für die Krümmung

Wir müssen die beiden Fälle $f''(x_0) > 0$ und $f''(x_0) < 0$ unterscheiden.
Wir behandeln den ersten Fall.

Wegen $0 < f''(x_0) = \varphi''(x_0)$ muss die Funktion eine Gleichung der Form
$\varphi(x) = y_m - \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}$ (unterer Halbkreis) haben.

Die drei Bedingungen liefern für die Parameter x_m, y_m und r folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = f(x_0) \\ \varphi'(x_0) = f'(x_0) =: \alpha \\ \varphi''(x_0) = f''(x_0) =: \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_m - \sqrt{r^2 - (x_0 - x_m)^2} = f(x_0) \quad (1) \\ \dfrac{x_0 - x_m}{(r^2 - (x_0 - x_m)^2)^{\frac{1}{2}}} = \alpha \qquad (2) \\ \dfrac{r^2}{(r^2 - (x_0 - x_m)^2)^{\frac{3}{2}}} = \beta \qquad (3) \end{cases}$$

Wir müssen zeigen, dass dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

Wir quadrieren (2) und lösen die quadrierte Gleichung nach $(x - x_m)^2$ auf. Das Ergebnis setzen wir in (3) ein und bestimmen r.

$$\Rightarrow \frac{(x_0 - x_m)^2}{r^2 - (x_0 - x_m)^2} = \alpha^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_m)^2 = (r^2 - (x_0 - x_m)^2) \cdot \alpha^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_m)^2 = \frac{r^2 \cdot \alpha^2}{1 + \alpha^2} \quad (4)$$

Mit (4) in (3):

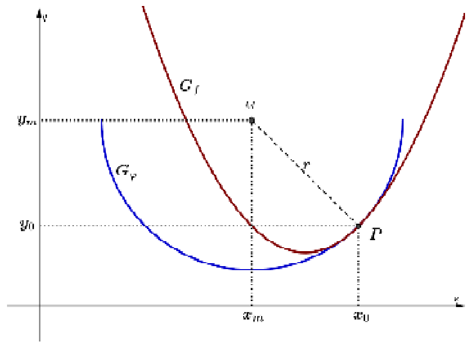
$$\frac{r^2}{\left(r^2 - \frac{r^2 \cdot \alpha^2}{1 + \alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \beta \Leftrightarrow \frac{r^2}{r^3 \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{r}} = \beta \left(1 - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{\beta}{(1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad (5)$$

Wir setzen dieses Ergebnis in (4) ein und lösen nach x_m auf:

$$(x_0 - x_m)^2 = r^2 \cdot \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{(1 + \alpha^2)^3}{\beta^2} \cdot \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{(1 + \alpha^2)^2 \cdot \alpha^2}{\beta^2} \Leftrightarrow x_0 - x_m = \pm \frac{(1 + \alpha^2)|\alpha|}{|\beta|}$$

Wegen $\beta = f''(x_0) > 0$:

$$x_m = x_0 \pm \frac{1 + \alpha^2}{\beta} |\alpha|$$



Die Abbildung zeigt: Wenn $\alpha = f'(x_0) \geq 0$ ist, ist $x_m \leq x_0$, und es gilt:

$$x_m = x_0 - \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \cdot \alpha.$$

Wenn $\alpha = f'(x_0) < 0$ ist, ist $x_m > x_0$, und es ergibt sich:

$$x_m = x_0 + \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \cdot (-\alpha) = x_0 - \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \cdot \alpha$$

In jedem Fall folgt für die x-Koordinate des Mittelpunkts:

$$\boldsymbol{x_m = x_0 - \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \cdot \alpha}$$

Mit Hilfe von (1), (4) und (5) bestimmen wir y_m:

$$y_m = f(x_0) + \sqrt{r^2 - (x_0 - x_m)^2} = f(x_0) + \sqrt{r^2 - r^2 \cdot \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}} = f(x_0) + r \cdot \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}}$$

$$\boldsymbol{y_m} = f(x_0) + \frac{(1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \boldsymbol{f(x_0) + \frac{1 + \alpha^2}{\beta}}$$

Im zweiten Fall ($\beta = f''(x_0) < 0$) muss die Funktion φ eine Gleichung der Form $\varphi(x) = y_m + \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}$ (oberer Halbkreis) haben. Die Rechnung zur Bestimmung von r, x_m, y_m verläuft analog.

In jedem Fall erhält man für die Scharparameter folgende Werte:

$$r = \frac{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{|\beta|};\ x_m = x_0 - \frac{1+\alpha^2}{\beta} \cdot \alpha;\ y_m = f(x_0) + \frac{1+\alpha^2}{\beta} \quad (*)$$

Dabei ist $\alpha = f'(x_0)$ und $\beta = f''(x_0)$.

Das Gleichungssystem (1) - (3) ist also eindeutig lösbar, und damit ist der Satz bewiesen.

■

Wir können nun für die Krümmung von Funktionsgraphen eine Formel angeben.

• Wenn G_f linksgekrümmt ist, gilt:
$\kappa_f(x_0) :=$ Krümmung des unteren Halbkreises mit Radius r und Mittelpunkt $(x_m|y_m)$ gemäß (*), also

$$\kappa_f(x_0) = \frac{1}{r} = \frac{|\beta|}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f''(x_0)}{(1+f'(x_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{da } \beta = f''(x_0) > 0 \text{ ist})$$

• Wenn G_f rechtsgekrümmt ist, gilt:
$\kappa_f(x_0) :=$ Krümmung des oberen Halbkreises mit Radius r und Mittelpunkt $(x_m|y_m)$ gemäß (*), also

$$\kappa_f(x_0) = -\frac{1}{r} = \frac{-|\beta|}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f''(x_0)}{(1+f'(x_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{da } \beta = f''(x_0) < 0 \text{ ist})$$

Schreiben wir statt x_0 einfach x, so erhalten wir den

Satz
Sei f eine zweimal differenzierbare Funktion.
Dann gilt für die Krümmung des Graphen von f an der Stelle $x \in D_f$:

$$\boldsymbol{\kappa_f(x) = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

• Beispiele

Beispiel 1
Sei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = ax + b$ eine lineare Funktion.
Wegen $f''(x) = 0$ gilt: $\kappa_f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$. Die Krümmung von Geraden ist 0.

Beispiel 2
Sei $f: [-r, r] \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$; $r > 0$. G_f ist der obere Halbkreis mit Mittelpunkt O und Radius r. Für die Ableitungen gilt:

$$f'(x) = \frac{-x}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ und } f''(x) = \frac{-r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Daraus folgt für die Krümmung an einer Stelle $x \in]-r, r[$:

$$\kappa_f(x) = \frac{\frac{-r^2}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\left(1+\frac{x^2}{r^2-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{-r^2}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\left(\frac{r^2}{r^2-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-r^2}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{r^3} = -\frac{1}{r}$$

Der obere Halbkreis um O mit Radius r hat die konstante Krümmung $-\frac{1}{r}$ (wie es sein soll).

Beispiel 3

Sei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = x^2 + bx + c; b, c \in \mathbf{R}$. G_f ist eine verschobene Normalparabel.
Mit $f'(x) = 2x + b$ und $f''(x) = 2$ ergibt sich für die Krümmung:

$$\kappa_f(x) = \frac{2}{(1+(2x+b)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Krümmung ist maximal für $x = -b/2$, d.h. im Scheitelpunkt, und zwar beträgt sie dort 2. Für $x \to \pm\infty$ strebt sie gegen 0, die Parabel wird immer "gerader".

Beispiel 4

Krümmung der kubischen Parabel: $f(x) = x^3$
Mit $f'(x) = 3x^2$ und $f''(x) = 6x$ ergibt sich:

$$\kappa_f(x) = \frac{6x}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Krümmung ist 0 an der Stelle 0, sie ist positiv im Intervall $]0, \infty[$ und negativ in $]-\infty, 0[$. Die Parabel ist also in $]0, \infty[$ links- und in $]-\infty, 0[$ rechtsgekrümmt und hat an der Stelle 0 einen Wendepunkt.

Die Abbildung zeigt den Graphen von $x \mapsto \kappa_f(x)$. Die Krümmung ist an der Stelle $\frac{1}{\sqrt[4]{45}} \approx 0{,}3861$ maximal und an der Stelle $-\frac{1}{\sqrt[4]{45}} \approx -0{,}3861$ minimal, sie beträgt dort rund $\pm 1{,}76$.