

Aufgabe 23 Skizzieren von Graphen ganzrationaler Funktionen

a) $f(x) = x^3 - 9x$

Faktorisierung :

$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Nullstellen:

$x_1 = \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} \text{ VzW}$

$x_2 = \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} \text{ VzW}$

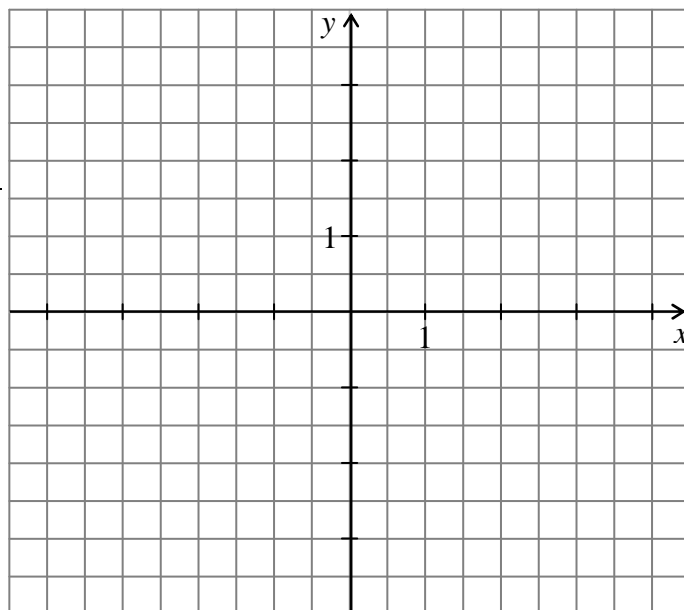
$x_3 = \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} \text{ VzW}$

Grenzwerte :

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\underline{\hspace{1cm}}) = \underline{\hspace{2cm}}$

Vorzeichentabelle für $f(x)$:

x	
$f(x)$	



b) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$

Faktorisierung :

$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Nullstellen:

$x_1 = \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} \text{ VzW}$

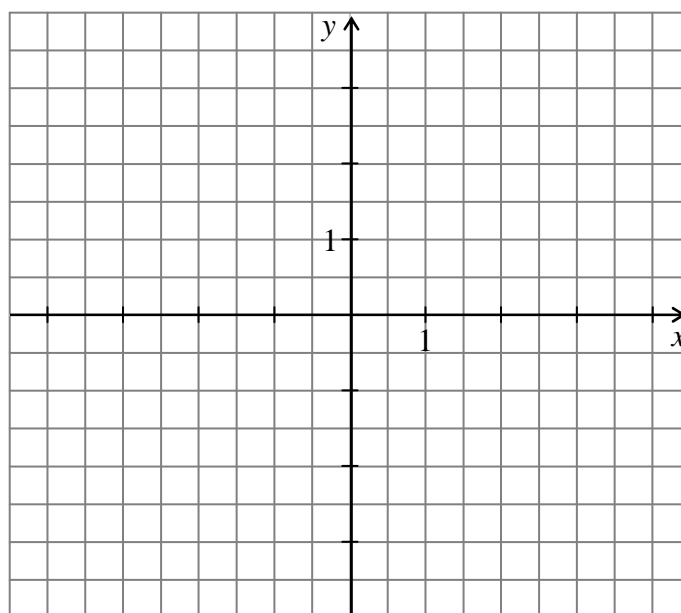
$x_2 = \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} \text{ VzW}$

Grenzwerte :

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\underline{\hspace{1cm}}) = \underline{\hspace{2cm}}$

Vorzeichentabelle für $f(x)$:

x	
$f(x)$	



c) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

Faktorisierung :

$f(x) =$ _____

Nullstellen:

$x_1 =$ _____ $-$ _____ VzW

$x_2 =$ _____ $-$ _____ VzW

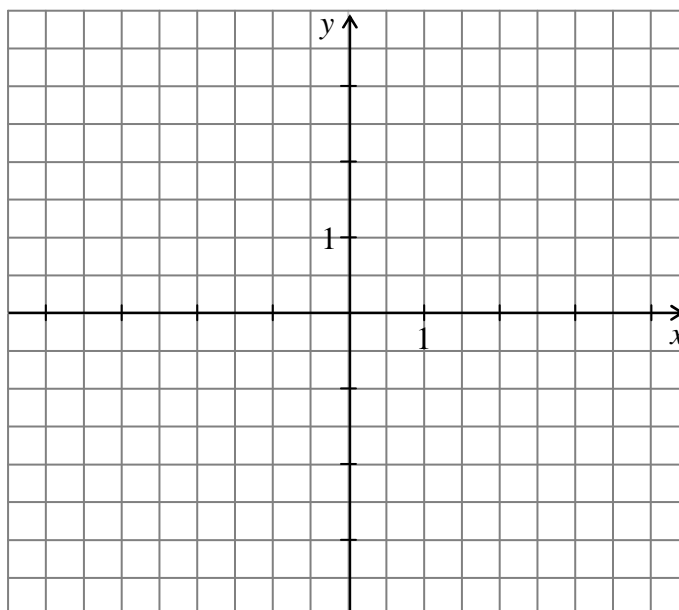
$x_3 =$ _____ $-$ _____ VzW

Grenzwerte :

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\text{ }) =$ _____

Vorzeichentabelle für $f(x)$:

x	
$f(x)$	



d) $f(x) = -x^4 - 3x^3$

Faktorisierung :

$f(x) =$ _____

Nullstellen:

$x_1 =$ _____ $-$ _____ VzW

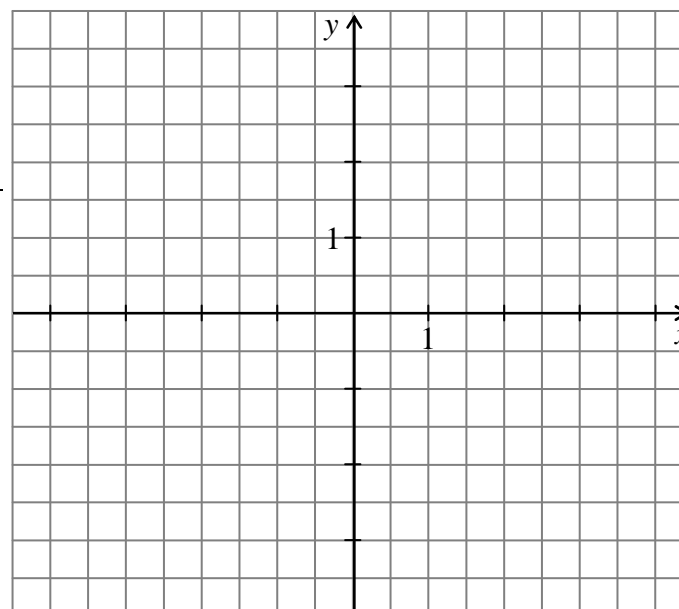
$x_2 =$ _____ $-$ _____ VzW

Grenzwerte :

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\text{ }) =$ _____

Vorzeichentabelle für $f(x)$:

x	
$f(x)$	



e) $f(x) = -(x-2)^3 \cdot (x^2 + 2x + 1)$

Faktorisierung :

$f(x) =$ _____

Nullstellen:

$x_1 =$ _____ $-$ _____ VzW

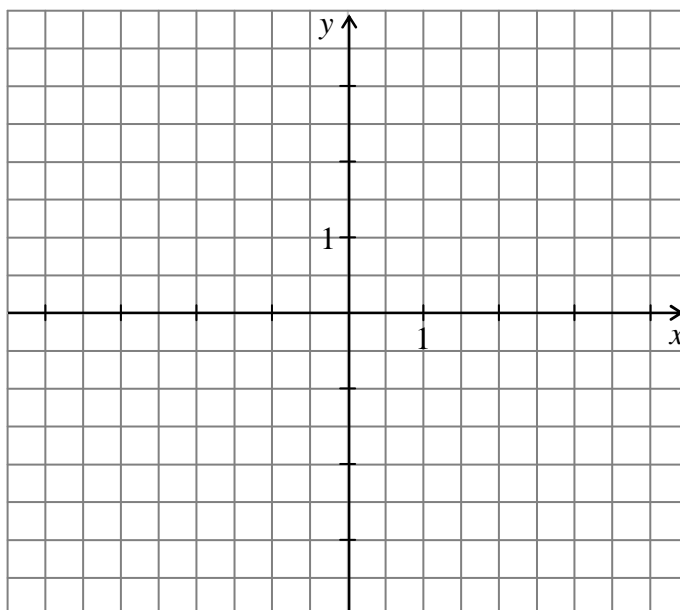
$x_2 =$ _____ $-$ _____ VzW

Grenzwerte :

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\text{_____}) = \text{_____}$

Vorzeichentabelle für $f(x)$:

x	
$f(x)$	



f) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

Faktorisierung :

$f(x) =$ _____

Nullstellen:

$x_1 =$ _____ $-$ _____ VzW

$x_2 =$ _____ $-$ _____ VzW

$x_3 =$ _____ $-$ _____ VzW

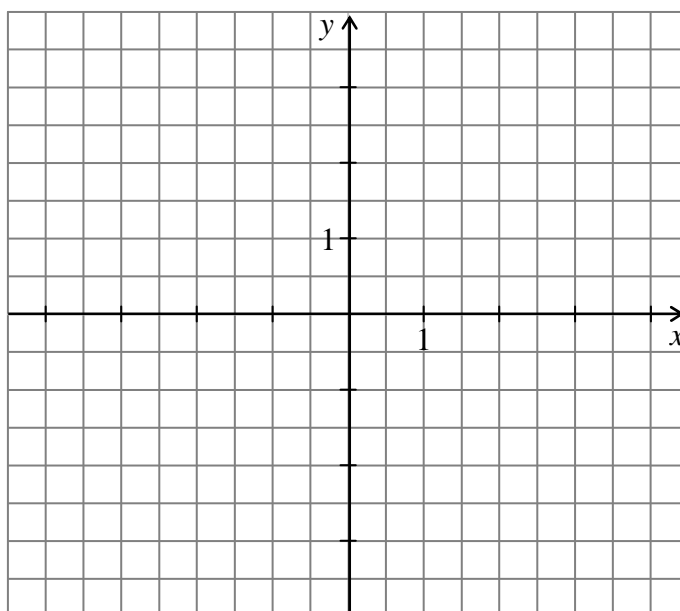
$x_4 =$ _____ $-$ _____ VzW

Grenzwerte :

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\text{_____}) = \text{_____}$

Vorzeichentabelle für $f(x)$:

x	
$f(x)$	



g) $f(x) = (1-x)^3 \cdot (x^2 + 4x + 4)$

Faktorisierung :

$f(x) =$ _____

Nullstellen:

$x_1 =$ _____ – _____ VZW

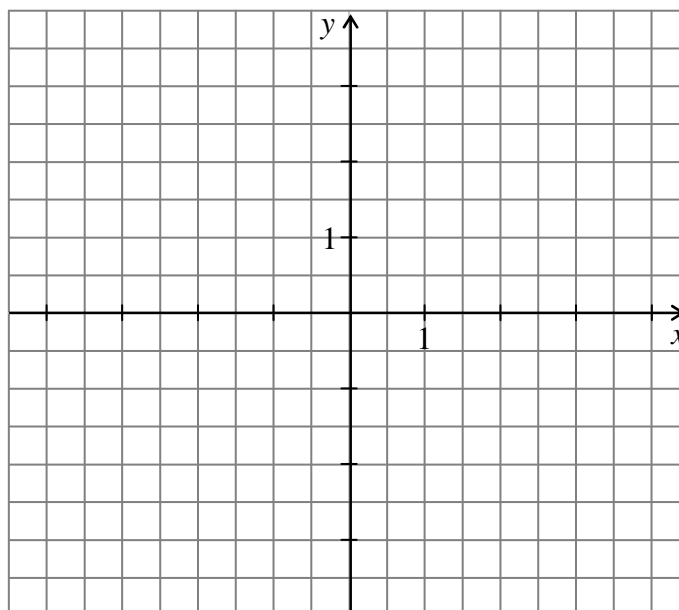
$x_2 =$ _____ – _____ VZW

Grenzwerte :

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\text{_____}) = \text{_____}$

Vorzeichentabelle für $f(x)$:

x	
$f(x)$	



h) $f(x) = -\frac{1}{3}x^5 + x^4$

Faktorisierung :

$f(x) =$ _____

Nullstellen:

$x_1 =$ _____ – _____ VZW

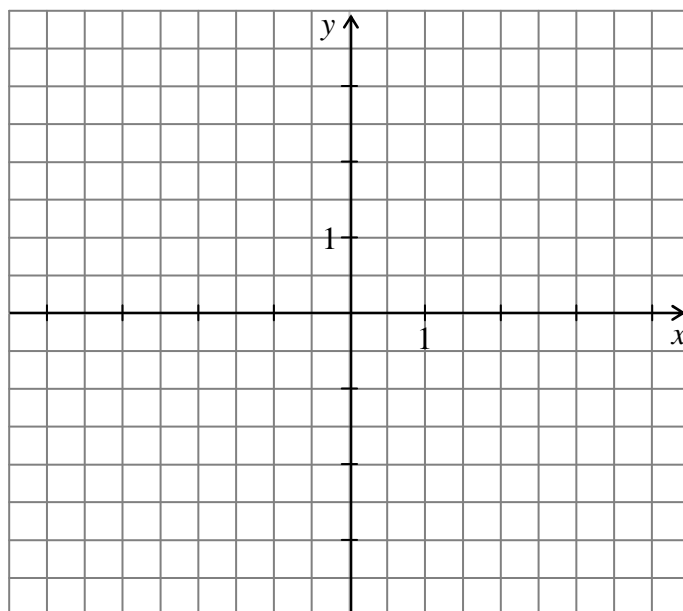
$x_2 =$ _____ – _____ VZW

Grenzwerte :

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\text{_____}) = \text{_____}$

Vorzeichentabelle für $f(x)$:

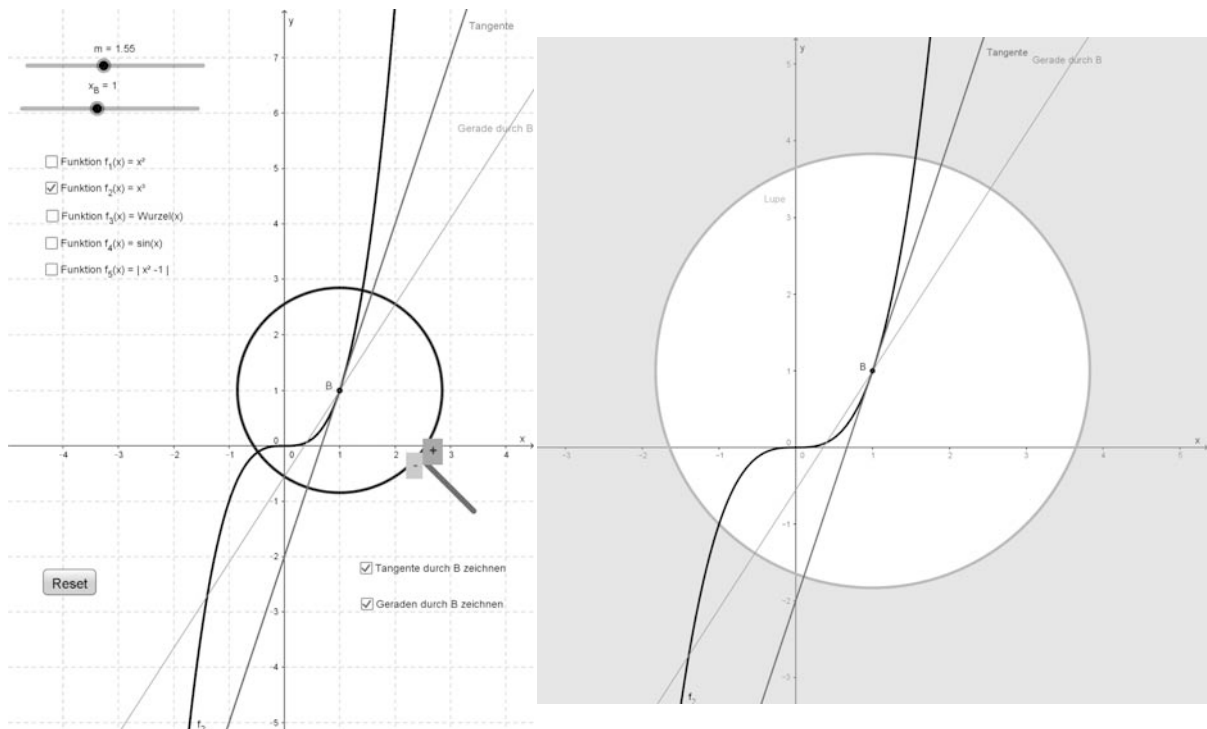
x	
$f(x)$	



Lineare Approximation

In der Geogebra-Datei sind per Menü folgende Funktionen wählbar:

- Quadratfunktion: $f_1(x) = x^2$
- Kubikfunktion: $f_2(x) = x^3$
- Wurzelfunktion: $f_3(x) = \sqrt{x}$
- Sinusfunktion: $f_4(x) = \sin(x)$
- Betragsfunktion: $f_5(x) = |x^2 - 1|$



Bei jeder Funktion kann ein Punkt B über einen Schieberegler für die x -Koordinate x_B auf dem Funktionsgraphen verschoben werden.

Die Umgebung des Punktes B kann über eine Lupe im zweiten Grafikfenster vergrößert beobachtet werden:

- Anklicken des Schalters $\boxed{+}$: Vergrößerung der Ansicht in Grafik 2
- Anklicken des Schalters $\boxed{-}$: Verkleinerung der Ansicht in Grafik 2

Bei starker Vergrößerung verschwindet der Lupenkreis im Grafikfenster 2. Es ist empfehlenswert, den Anfangszustand über den Schalter **Reset** wiederherzustellen.

Für den Punkt B kann in beiden Grafikfenstern die Darstellung der folgenden Geraden aktiviert werden:

- Tangente t_B an den Funktionsgraphen im Punkt B
- Beliebige Gerade g_m durch den Punkt B

Die Steigung m dieser Geraden ist über einen Schieberegler variierbar. Hierdurch ist ein Vergleich mit der Tangente t_B möglich.

Tangente als optimale Näherung

Einstellung: → Tangente t_B und Gerade g_m sichtbar

Bei Veränderung der Steigung m der Gerade g_m erkennt man, dass sich die Tangente t_B unter allen Geraden durch den Berührungspunkt B diejenige ist, die sich in der Nähe von B am besten an den Kurvenverlauf anpasst.

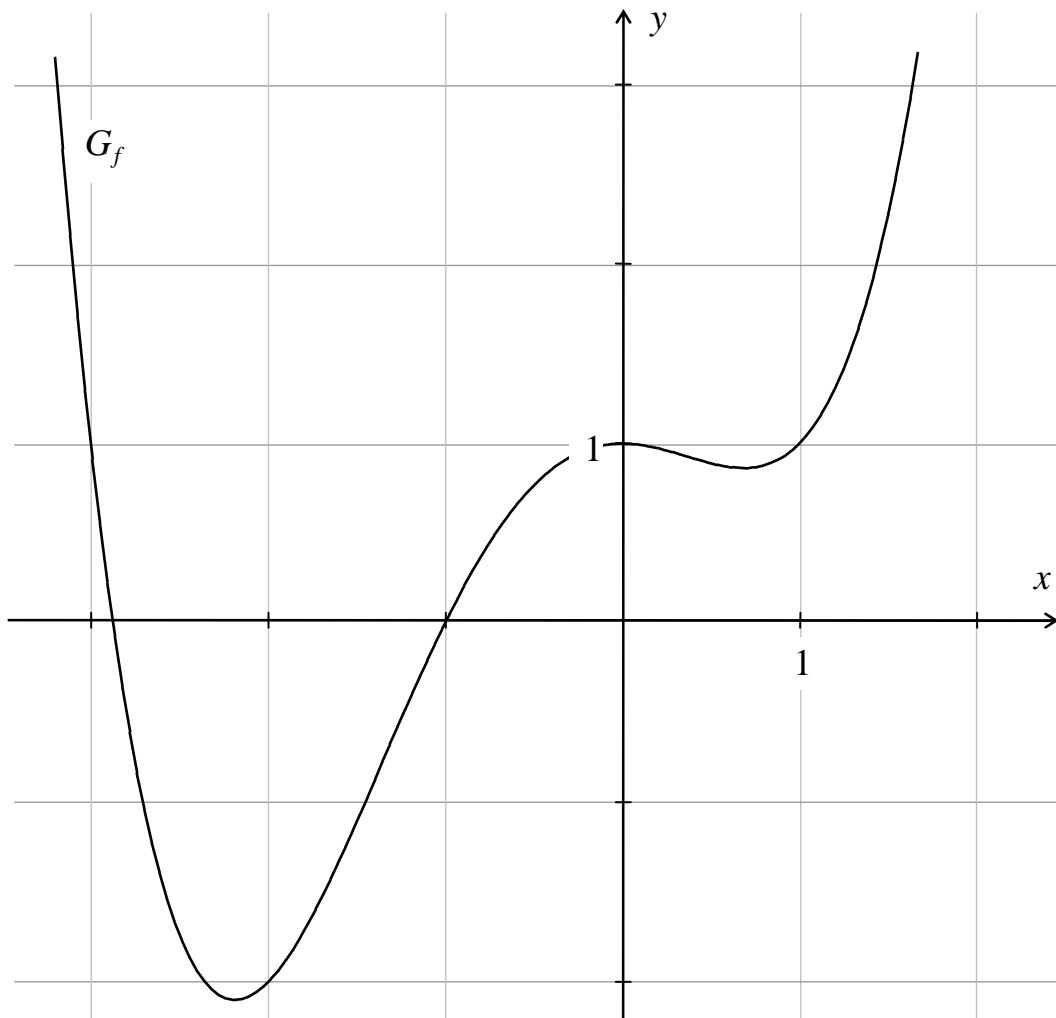
Anschauliches Kriterium für die Differenzierbarkeit im Punkt B

Einstellung: → Tangente t_B sichtbar, Gerade g_m ausgeblendet

Beim Zoomen der Umgebung der Stelle x_B erkennt man unter der Lupe im rechten Grafikfenster, dass bei den Funktionen f_1 bis f_4 der Funktionsgraph eine immer mehr geradlinige Form annimmt und schließlich in guter Näherung mit der Tangente übereinstimmt. Dies kann als anschauliches Kriterium für die Differenzierbarkeit an der Stelle x_B gedeutet werden.

Den Kontrast zu dieser Eigenschaft zeigt die Funktion f_5 . Egal wie stark man die Vergrößerung in der Nähe der Nichtdifferenzierbarkeitsstelle 1 (oder aber -1) auch wählt, der Knick verschwindet nicht.

Seite 39, Aufgabe 15 ; Graph der Funktion



Beweis der Potenzregel für rationale Exponenten① *Vorüberlegung*

Wir weisen zuerst die Gültigkeit von $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$ nach.

Es gilt allgemein für $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x \quad (\text{beidseitiges Ableiten, Anwenden der Kettenregel})$$

$$n \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = 1$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die gesuchte Ableitung berechnen:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{-(n-1)} = \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{-(1-\frac{1}{n})} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}.$$

$$\text{Also: } \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \text{ für } n \in \mathbb{N}^*$$

② *Beweis der Potenzregel für rationale Exponenten*

Wir berechnen die Ableitung des Term $x^{\frac{p}{q}}$ mit $p, q \in \mathbb{N}^*$.

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)' \quad (\text{Anwenden der Kettenregel})$$

$$= \underbrace{p \cdot \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}}_{\text{innere Ableitung}}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p-1}{q}} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}+\frac{1}{q}-1}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\text{Also: } \left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} \text{ für } p, q \in \mathbb{N}^*$$

Beweis der Produktregel

Produktregel

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch das Produkt $f \cdot g$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt dabei:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Ein Beweis der Produktregel lässt sich auch über die Definition der Differenzierbarkeit gemäß des Ansatzes der linearen Approximation führen.

Differenzierbarkeit (auf Grundlage der linearen Approximation)

Eine Funktion heißt an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn es eine Zahl m gibt, so dass für das in der Darstellung

$$f(x_0 + h) = m \cdot h + f(x_0) + h \cdot R(x_0, h)$$

aufretende Restglied gilt: $R(x_0, h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.

Die Zahl $m = f'(x_0)$ heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 .

Die Voraussetzungen der Differenzierbarkeit der Funktionen f und g an einer Stelle x bedeuten, dass es Darstellungen in folgender Form gibt:

- $f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + h \cdot R_f(x, h)$ mit $R_f(x, h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$
- $g(x+h) = g(x) + g'(x) \cdot h + h \cdot R_g(x, h)$ mit $R_g(x, h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$

Hiermit ergibt sich durch Ausmultiplizieren und Ordnen:

$$\begin{aligned} & (f \cdot g)(x+h) \\ &= [f(x) + f'(x) \cdot h + h \cdot R_f(x, h)] \cdot [g(x) + g'(x) \cdot h + h \cdot R_g(x, h)] \\ &= + f(x) \cdot g(x) \quad + f(x) \cdot g'(x) \cdot h \quad + f(x) \cdot h \cdot R_g(x, h) \\ &= + f'(x) \cdot h \cdot g(x) \quad + f'(x) \cdot h \cdot g'(x) \cdot h \quad + f'(x) \cdot h \cdot h \cdot R_g(x, h) \\ &= + h \cdot R_f(x, h) \cdot g(x) \quad + h \cdot R_f(x, h) \cdot g'(x) \cdot h \quad + h \cdot R_f(x, h) \cdot h \cdot R_g(x, h) \\ &= f(x) \cdot g(x) + \underbrace{(f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x))}_{= \text{Ableitung } (f \cdot g)'(x)} \cdot h \\ &\quad + h \cdot [f(x) \cdot R_g(x, h) + f'(x) \cdot h \cdot g'(x) + f'(x) \cdot h \cdot R_g(x, h) \\ &\quad + \underbrace{R_f(x, h) \cdot g(x) + h \cdot R_f(x, h) \cdot g'(x) + R_f(x, h) \cdot h \cdot R_g(x, h)}_{\text{Restterm } R_{f,g}(x, h) \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0,} \\ &\quad \text{denn } R_f(x, h), R_g(x, h), h \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Beweis der Potenzregel für rationale Exponenten

① Vorüberlegung

Wir weisen zuerst die Gültigkeit von $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$ nach.

Es gilt allgemein für $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x \quad (\text{beidseitiges Ableiten, Anwenden der Kettenregel})$$

$$n \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = 1$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die gesuchte Ableitung berechnen:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{-(n-1)} = \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{-(1-\frac{1}{n})} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Also: $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$ für $n \in \mathbb{N}^*$

② Beweis der Potenzregel für rationale Exponenten

Wir berechnen die Ableitung des Term $x^{\frac{p}{q}}$ mit $p, q \in \mathbb{N}^*$.

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)' \quad (\text{Anwenden der Kettenregel})$$

$$= \underbrace{p \cdot \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}}_{\text{innere Ableitung}}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p-1}{q}} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}$$

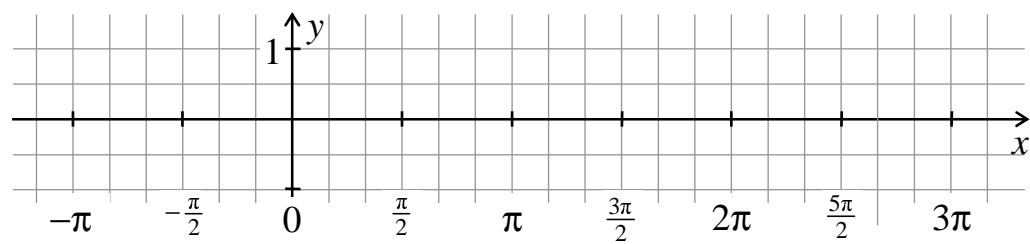
$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q} - \frac{1}{q}} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q} - \frac{1}{q} + \frac{1}{q} - 1}$$

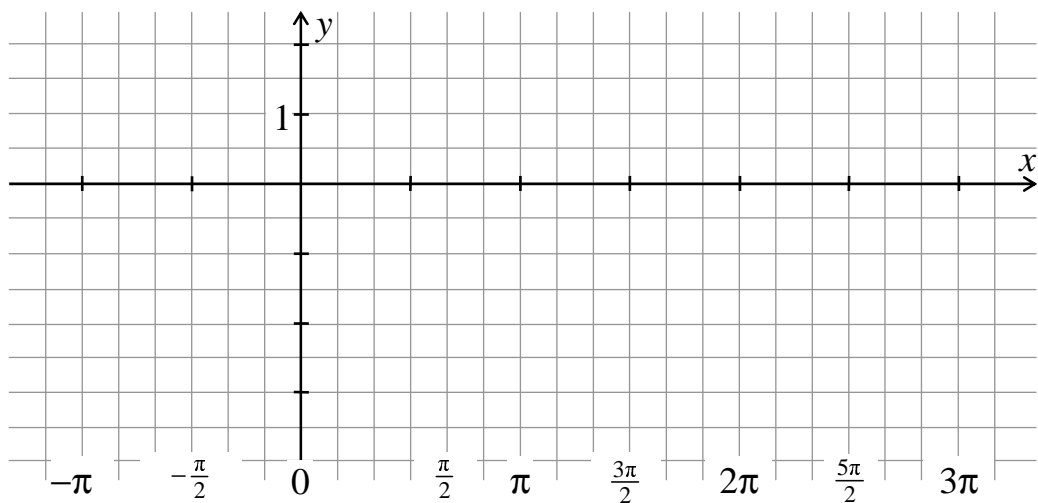
$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

Also: $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$ für $p, q \in \mathbb{N}^*$

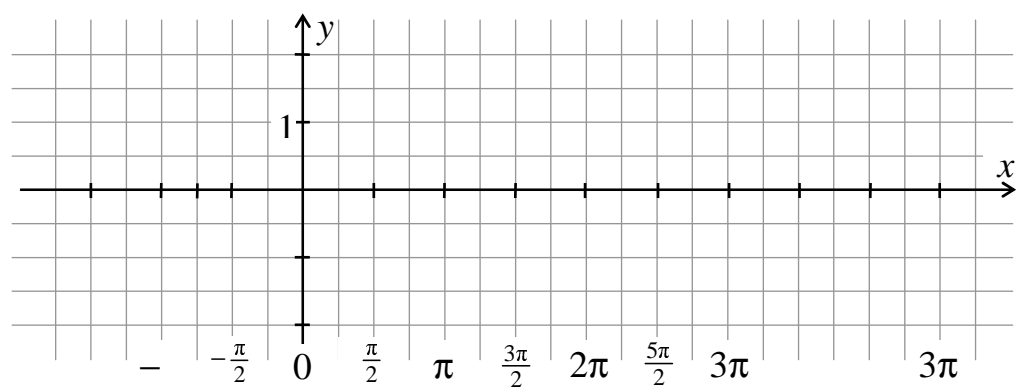
11 a)



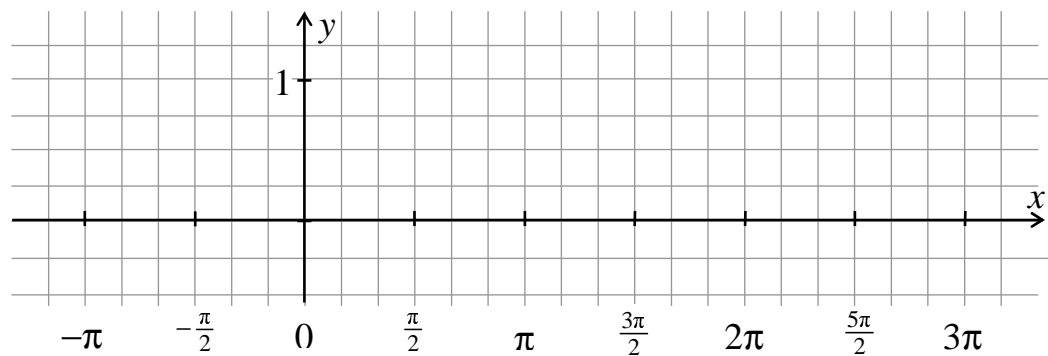
11 b)



11 c)



11 d)



Achsensymmetrie bei quadratischen Funktionen

Wir betrachten quadratische Funktionen in der allgemeinen Form

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ mit } a \in \mathbb{R}^* \text{ und } b, c \in \mathbb{R}.$$

Jede allgemeine quadratische Funktion lässt sich in die Scheitel(punkt)form umwandeln (Nachweis siehe am Ende):

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a \cdot (x - x_E)^2 + y_E.$$

Aus ihr ist der Scheitel der zugehörigen Parabel direkt ablesbar: $S(x_E | y_E)$.

Der Graph von f geht aus dem Graphen von $y = x^2$ durch Streckung um a in y -Richtung, Parallelverschiebung um x_E in x -Richtung und um y_E in y -Richtung hervor.

Quadratische Funktionen besitzen die folgende Symmetrieeigenschaft:

Achsensymmetrie bei quadratischen Funktionen

Jede quadratische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a \in \mathbb{R}^*$ und $b, c \in \mathbb{R}$ ist achsensymmetrisch zu der Parallelen zur y -Achse durch den Scheitel $S(x_E | y_E)$.

Es gilt $f(x_E - x) = f(x_E + x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Zum Beweis verwenden wir die Scheitel(punkt)form $f(x) = a \cdot (x - x_E)^2 + y_E$.

- $f(x_E - x) = a \cdot (x_E - x - x_E)^2 + y_E = a \cdot (-x)^2 + y_E = a \cdot x^2 + y_E$
- $f(x_E + x) = a \cdot (x_E + x - x_E)^2 + y_E = a \cdot x^2 + y_E = a \cdot x^2 + y_E$

Also gilt $f(x_E - x) = f(x_E + x)$

Umwandlung der allgemeinen Form in die Scheitelform

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \quad :a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \quad (\text{quadratische Ergänzung})$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a \cdot \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{-x_E} + \underbrace{c - \frac{b^2}{4a}}_{y_E}$$

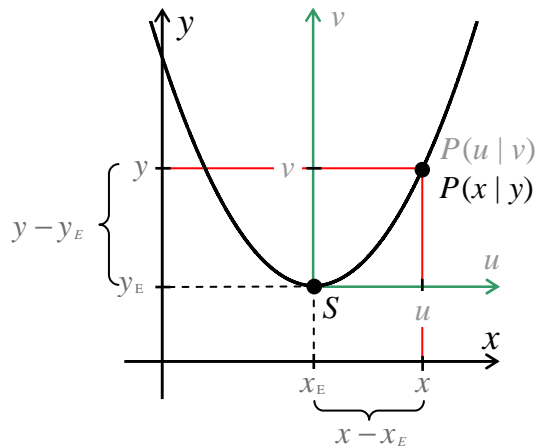
Im Hinblick auf eine Betrachtung bei ganzrationalen Funktionen dritten Grades soll folgende Möglichkeit, zur Scheitelform zu gelangen, beschrieben werden.

Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten:

$$x_E = -\frac{b}{2a} \quad \text{und} \quad y_E = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Wir verschieben das Koordinatensystem so, dass sich der Scheitelpunkt S danach im Ursprung befindet:

$$u = x - x_E \quad \text{und} \quad v = y - y_E.$$



Dann gilt:

$$\begin{aligned} v = y - y_E &= a x^2 + b x + c - y_E \\ &= a(u + x_E)^2 + b(u + x_E) + c - y_E \\ &= a\left(u - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(u - \frac{b}{2a}\right) + c - y_E \\ &= a\left(u^2 - 2 \cdot \frac{b}{2a} u + \frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(u - \frac{b}{2a}\right) + c - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\ &= a u^2 - 2a \cdot \frac{b}{2a} u + a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + b u - \frac{b^2}{2a} + c - c + \frac{b^2}{4a} \\ &= a u^2 - b u + \frac{b^2}{4a} + b u - \frac{b^2}{2a} + \frac{b^2}{4a} \\ &= a u^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{b^2}{4a} \\ &= a u^2 \end{aligned}$$

Kehrt man wieder zum ursprünglichen Koordinatensystem zurück, so ergibt sich aus der Gleichung $v = a u^2$ die Scheitelform:

$$y - y_E = a(x - x_E)^2 \Leftrightarrow y = a(x - x_E)^2 + y_E$$

Punktsymmetrie bei kubischen Funktionen

Wir betrachten ganzrationale Funktionen dritten Grades (kubische Funktionen) in der allgemeinen Form

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ mit } a \in \mathbb{R}^* \text{ und } b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Jede kubische Funktion besitzt genau einen Wendepunkt. Analog zur Scheitelform bei quadratischen Funktionen lässt sich jede allgemeine kubische Funktion in die Wendepunktform umwandeln:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a \cdot (x - x_w)^3 + m_w \cdot (x - x_w) + y_w.$$

Dabei steht m_w abkürzenden für Steigung des Graphen im Wendepunkt.

Aus ihr lässt sich der Wendepunkt des Graphen direkt ablesen: $W(x_w | y_w)$.

(Der Nachweis zur Umwandlung in die Wendepunktform ist sehr rechenintensiv und komplizierter als im quadratischen Fall. Er kann am Ende dieses Textes nachgelesen werden.)

Kubische Funktionen besitzen die folgende Symmetrieeigenschaft.

Punktsymmetrie zum Wendepunkt bei kubischen Funktionen

Jede kubische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a \in \mathbb{R}^*$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$ ist symmetrisch zu ihrem Wendepunkt $W(x_w | y_w)$.

Es gilt $f(x_w - x) + f(x_w + x) = 2 \cdot y_w$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Wir verwenden die Wendepunktform $f(x) = a \cdot (x - x_w)^3 + m_w \cdot (x - x_w) + y_w$ für kubische Funktionen zum Beweis.

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(x_w - x) &= a \cdot (x_w - x - x_w)^3 + m_w \cdot (x_w - x - x_w) + y_w \\ &= a \cdot (-x)^3 + m_w \cdot (-x) + y_w \\ &= -a \cdot x^3 - m_w \cdot x + y_w \\ \bullet \quad f(x_w + x) &= a \cdot (x_w + x - x_w)^3 + m_w \cdot (x_w + x - x_w) + y_w \\ &= a \cdot x^3 + m_w \cdot x + y_w \\ &= a \cdot x^3 + m_w \cdot x + y_w \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$f(x_w - x) + f(x_w + x) = (-a \cdot x^3 - m_w \cdot x + y_w) + (a \cdot x^3 + m_w \cdot x + y_w) = 2y_w$$

Umwandlung der allgemeinen Form in die Wendepunktform

Wir betrachten die kubische Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a \neq 0$.

Für die Ableitungen gilt:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{und} \quad f''(x) = 6ax + 2b.$$

Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunkts ergibt:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}.$$

Es handelt sich um eine Nullstelle von f'' mit Vorzeichenwechsel und damit um eine Wendestelle. Für die y -Koordinate des Wendepunkts ergibt sich:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{3a}\right) &= a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d \\ &= -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{3b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \\ &= \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \end{aligned}$$

Damit ist auch nachgewiesen, dass jede kubische Funktion genau einen Wendepunkt $W(x_W | y_W)$ besitzt. Für seine Koordinaten gilt:

$$x_W = -\frac{b}{3a} \quad \text{und} \quad y_W = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d.$$

Um die Schreibweise für die Wendepunktform abzukürzen, berechnen wir noch die Steigung an der Wendestelle.

$$\begin{aligned} m_W &= f'(x_W) = 3a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c \\ &= \frac{b^2}{3a} - 2\frac{b^2}{3a} + c = -\frac{b^2}{3a} + c \end{aligned}$$

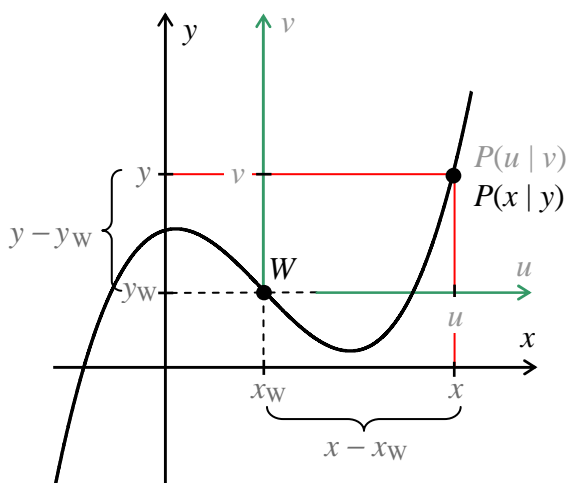
Zur Wendepunktform gelangt man durch eine analoge Vorgehensweise zum Fall der quadratischen Funktionen.

Wir verschieben das Koordinatensystem so, dass sich der Wendepunkt W danach im Ursprung befindet:

$$u = x - x_W \quad \text{und} \quad v = y - y_W.$$

Wir rechnen die Funktionsgleichung analog zum quadratischen Fall um.

Der Rechenaufwand ist dabei allerdings „etwas“ höher.



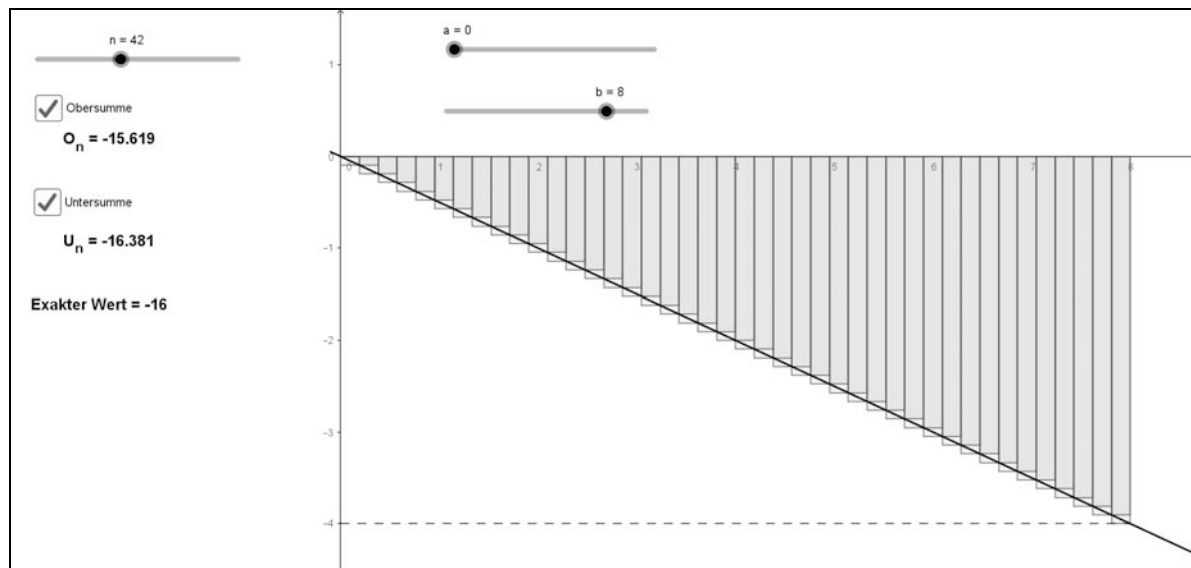
Es gilt:

$$\begin{aligned}
 v &= y - y_w = a x^3 + b x^2 + c x + d - y_w \\
 &= a(u - x_w)^3 + b(u - x_w)^2 + c(u - x_w) + d - y_w \\
 &= a(u - \frac{b}{3a})^3 + b(u - \frac{b}{3a})^2 + c(u - \frac{b}{3a}) + d - y_w \\
 &= a(u^3 - 3\frac{b}{3a}u^2 + 3\frac{b^2}{9a^2}u - \frac{b^3}{27a^3}) + b(u^2 - 2\frac{b}{3a}u + \frac{b^2}{9a^2}) \\
 &\quad + c(u - \frac{b}{3a}) + d - (\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d) \\
 &= au^3 - bu^2 + \frac{b^2}{3a}u - \frac{b^3}{27a^2} + bu^2 - 2\frac{b^2}{3a}u + \frac{b^3}{9a^2} \\
 &\quad + cu - \frac{bc}{3a} + d - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d \\
 &= au^3 - \frac{b^2}{3a}u + cu - \frac{3b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} = au^3 - \frac{b^2}{3a}u + cu - \frac{3b^3}{27a^2} + \frac{3b^3}{27a^2} \\
 &= au^3 + (-\frac{b^2}{3a}u + cu) = au^3 + (-\frac{b^2}{3a} + c)u \\
 &= au^3 + m_w u
 \end{aligned}$$

Kehrt man wieder zum ursprünglichen Koordinatensystem zurück, so ergibt sich aus der Gleichung $v = au^3$ die Scheitelform:

$$y - y_w = a(x - x_w)^3 + m_w(x - x_w) \Leftrightarrow y = a(x - x_w)^3 + m_w(x - x_w) + y_w.$$

Fläche vollständig unterhalb der x -Achse



Für den in dem Screenshot dargestellten Fall konvergieren die Unter- und auch die Obersumme (wenn auch langsam) gegen einen gemeinsamen Grenzwert nämlich in diesem Fall die negative Zahl -16 :

$$A_0(8) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(8) = \lim_{n \rightarrow +\infty} O_n(8) = -\frac{1}{4} \cdot 8^2 = -16 < 0.$$

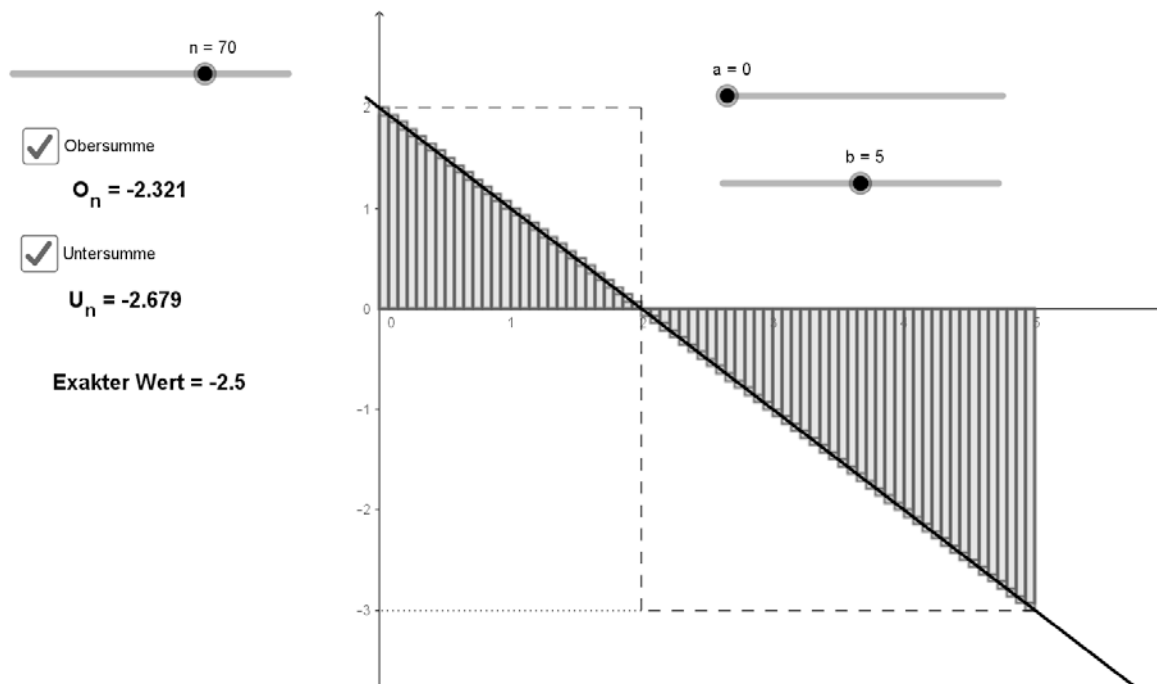
Für dieses Ergebnis lässt sich aber dennoch ein Zusammenhang zu der betrachteten Fläche herstellen. Eine elementargeometrische Betrachtung liefert:

$$\mu(A_\Delta) = \frac{1}{2} \cdot \mu(A_\square) = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16.$$

Durch die Ober- und Untersummenbildung werden Flächen unterhalb der x -Achse negativ gezählt („negative Höhe“ durch die Funktionswerte).

Variation: Trapezflächen mithilfe des Schiebereglers a .

Fläche ober- und unterhalb der x-Achse



Für den in dem Screenshot dargestellten Fall konvergieren die Unter- und auch die Obersumme (wenn auch langsam) wiederum gegen eine negative Zahl als Grenzwert, nämlich $-2,5$.

$$A_0(5) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(5) = \lim_{n \rightarrow +\infty} O_n(5) = -2,5 < 0.$$

Für dieses Ergebnis lässt sich aber dennoch ein Zusammenhang zu den beiden auftretenden Flächen herstellen.

$$\text{linke Fläche: } \mu(A_l) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 2) = 2$$

(Darstellung bei Einstellung $a = 0$ und $b = 2$ für die Schieberegler.)

$$\text{rechte Fläche: } \mu(A_r) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 3) = 4,5$$

(Darstellung bei Einstellung $a = 2$ und $b = 5$ für die Schieberegler.)

Der gemeinsame Grenzwert von Ober- und Untersumme ist die „Flächenbilanz“

$$A_0(5) = \mu(A_l) - \mu(A_r) = 2 - 4,5 = -2,5 < 0.$$

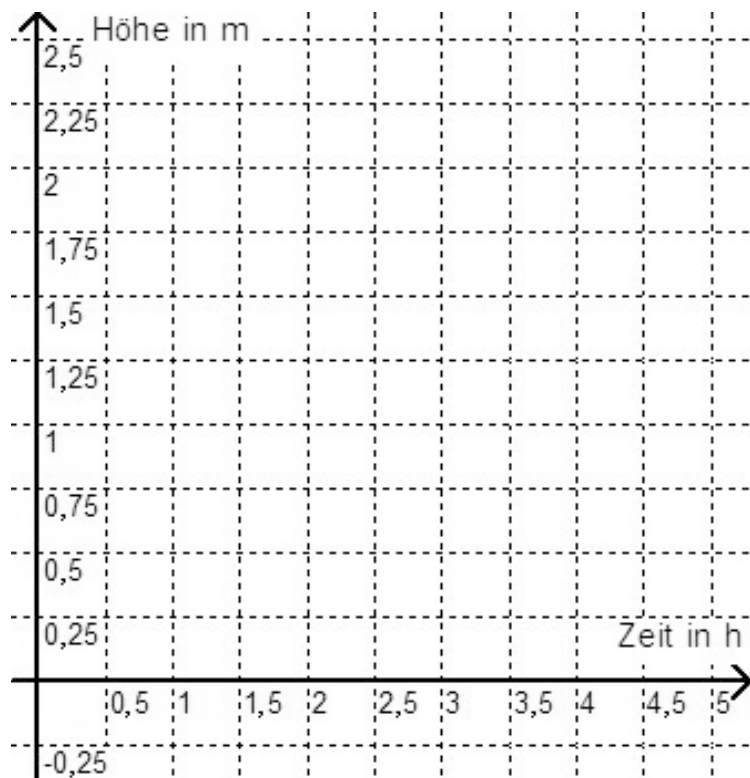
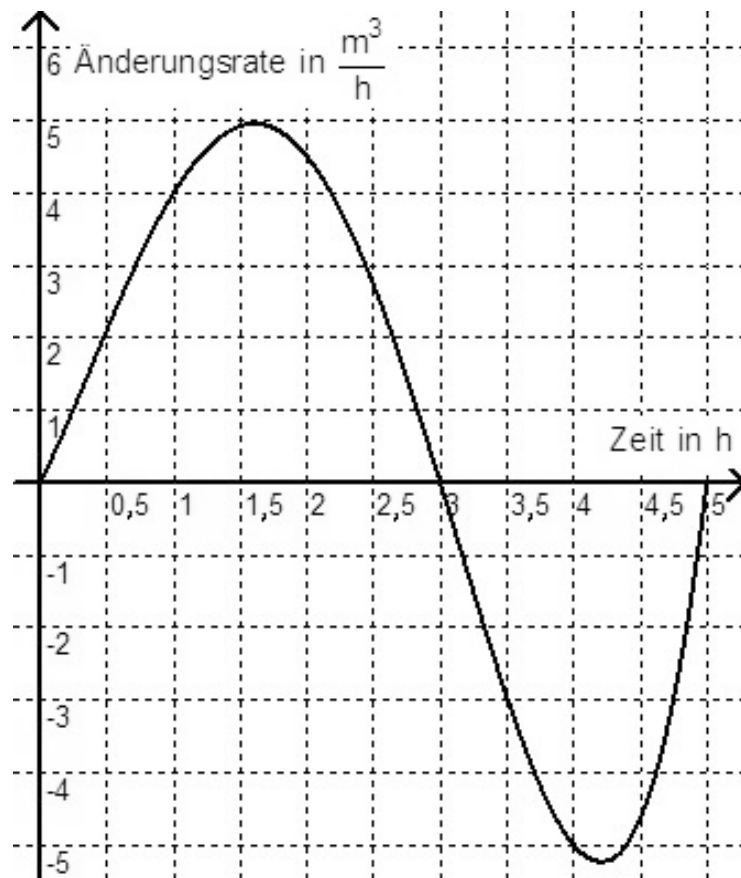
Variation:

SchiebereglerEinstellung: $a = 0$ und $b = 4$

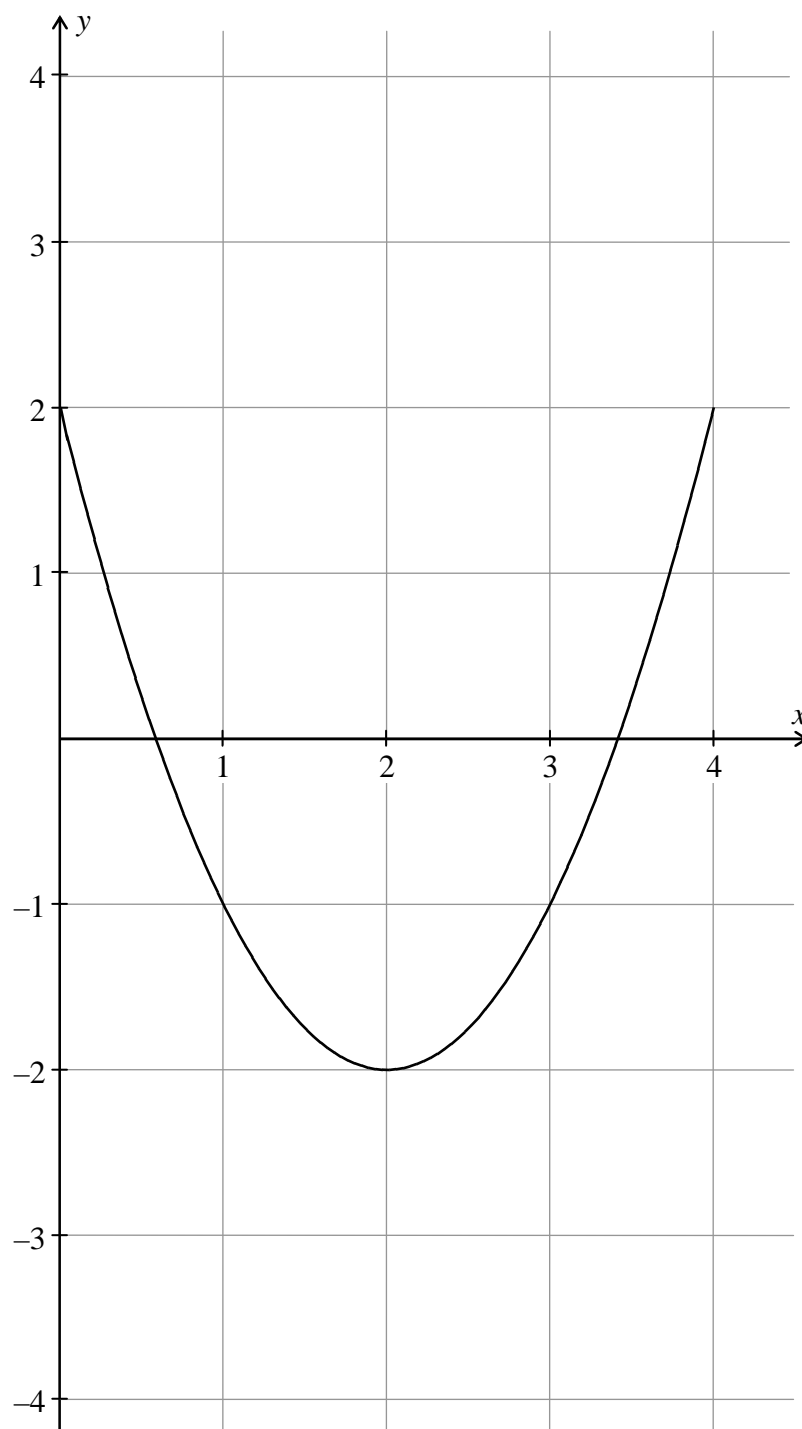
$$A_0(4) = \mu(A_l) - \mu(A_r) = 2 - 2 = 0$$

Interpretation: gleich große Teilflächen ober- und unterhalb

Seite 210, A6, Sisse eines möglichen Graphens



Seite 211, A11, Graph der Integralfunktion

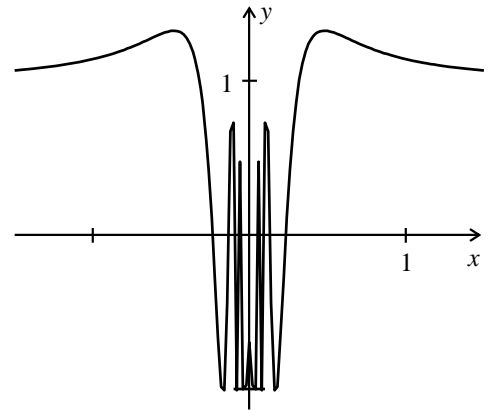


Unstetige Funktion mit einer Stammfunktion

Eigenschaften der Funktion $x \mapsto \begin{cases} 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & , \text{ wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & , \text{ wenn } x = 0 \end{cases}$

① Unstetigkeit an der Stelle 0

Wir Die Unstetigkeit von f an der Stelle 0 kommt im Schaubild nicht durch eine Sprungstelle zum Ausdruck. Bei Annäherung an die kritische Stelle 0 beginnt der Graph zu oszillieren.



Nachweis der Unstetigkeit an der Stelle 0:

Wir betrachten die Folge von Zahlen

$$x_k := \frac{1}{2k\pi} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Dabei gilt: Für $k \rightarrow +\infty$ gilt $x_k \rightarrow 0^+$ (wir nähern uns 0 vom Positiven her),
für $k \rightarrow -\infty$ gilt $x_k \rightarrow 0^-$ (wir nähern uns 0 vom Negativen her).

Für beide Fälle gilt: $f(x_k) = 2 \cdot \frac{1}{2k\pi} \cdot \sin(2k\pi) - \cos(2k\pi) = 0 - 1 = -1$.

Andererseits ist der Funktionswert an der Stelle 0 aber erklärt als $f(0) = 0$. Dies bedeutet, dass f an der Stelle 0 unstetig ist.

② Existenz einer Stammfunktion

Trotz der Unstetigkeit an der Stelle 0 besitzt die Funktion f eine Stammfunktion. Wir betrachten die Funktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & , \text{ wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & , \text{ wenn } x = 0 \end{cases}$$

Nachweis, dass F eine Stammfunktion von f ist:

- Für $x \neq 0$ ist F nach den Ableitungsregeln differenzierbar und es gilt:

$$F'(x) = 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \cdot \cos(\frac{1}{x}) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = f(x).$$

- Für $x = 0$ ergibt die Betrachtung des Differenzenquotienten:

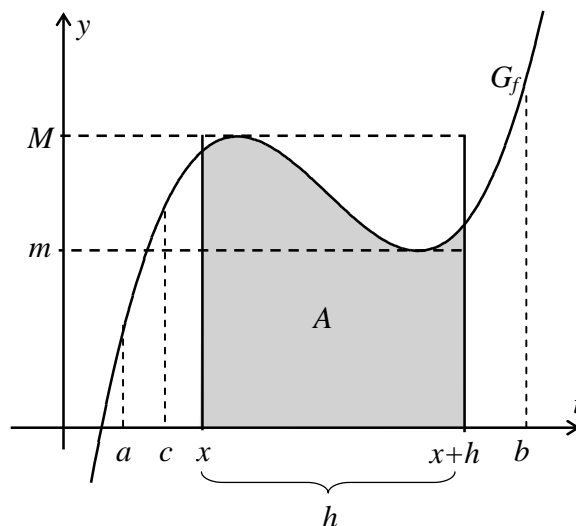
$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \right) = 0 = f(0).$$

Somit ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis des Hauptsatzes für stetige, nichtnegative Funktionen

Durch Einführung der Integralfunktion I_c zu einer stetigen Funktion f ergibt sich die Möglichkeit, nach einem Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen I_c und f zu fragen.

Wir betrachten für eine stetige Funktion $f \geq 0$ die Fläche unter G_f über dem Intervall $[x; x+h]$, wobei wir $h > 0$ voraussetzen.



Diese Fläche unter G_f über dem Intervall $[x; x+h]$ hat den Inhalt $I_c(x+h) - I_c(x)$. Da f stetig ist, hat f im Intervall $[x; x+h]$ ein Minimum m und ein Maximum M . Vergleicht man die Rechtecke mit m bzw. M als Höhe mit der Fläche unter G_f , so erhält man die Abschätzung:

$$m \cdot h \leq I_c(x+h) - I_c(x) \leq M \cdot h.$$

Die Division durch $h > 0$ liefert den Differenzenquotienten von I_c :

$$m \leq \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h} \leq M.$$

Dieser Differenzenquotient von I_c über $[x; x+h]$ liegt zwischen dem minimalen und dem maximalen Funktionswert von f . Für $h \rightarrow 0$ streben wegen der Stetigkeit von f die jeweiligen Minima m sowie Maxima M gegen den Funktionswert von f an der Stelle x . Es folgt im Grenzfall $h \rightarrow 0$:

$$f(x) \leq \underbrace{\frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h}}_{= I'_c(x)} \leq f(x).$$

Dies bedeutet: $I'_c(x) = \left(\int_c^x f(t) dt \right)' = f(x).$

Die umseitigen Überlegungen wurden unter der Voraussetzung durchgeführt, dass die Randfunktion f nur positive Funktionswerte besitzt und $h > 0$ gilt.

Analoge Überlegungen führen im Fall einer beliebigen stetigen Funktion und auch im Fall $h < 0$ zum gleichen Ergebnis.

Seite 153, Nr. ③

