

Eigenschaften der S-Multiplikation

Da die Summe von Vektoren und auch die S-Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Vektor koordinatenweise erklärt sind, übertragen sich die Rechenregeln für reelle Zahlen sinngemäß.

Für alle Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} und für alle reellen Zahlen α, β gilt:

Assoziativgesetz	(A \bullet)	$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$
Erstes Distributivgesetz	(D1)	$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$
Zweites Distributivgesetz	(D2)	$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$
Gesetz vom neutralen Element	(N \bullet)	$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Beweis

Für alle Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des \mathbb{R}^3 und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 (\text{A}\bullet) \quad \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) &= \alpha \cdot \left(\beta \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) \stackrel{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \alpha \cdot \begin{pmatrix} \beta \cdot a_1 \\ \beta \cdot a_2 \\ \beta \cdot a_3 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \cdot (\beta \cdot a_1) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot a_2) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot a_3) \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{\text{A}\bullet \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} (\alpha \cdot \beta) \cdot a_1 \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot a_2 \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot a_3 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} (\alpha \cdot \beta) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{D1}) \quad \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= \alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \stackrel{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \cdot (a_1 + b_1) \\ \alpha \cdot (a_2 + b_2) \\ \alpha \cdot (a_3 + b_3) \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{\text{D} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot b_1 \\ \alpha \cdot a_2 + \alpha \cdot b_2 \\ \alpha \cdot a_3 + \alpha \cdot b_3 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \cdot b_1 \\ \alpha \cdot b_2 \\ \alpha \cdot b_3 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
 &= \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(D2)} \quad (\alpha + \beta) \cdot \vec{a} &= (\alpha + \beta) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \stackrel[\text{in } \mathbb{R}^3]{\text{S-M.}} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta) \cdot a_1 \\ (\alpha + \beta) \cdot a_2 \\ (\alpha + \beta) \cdot a_3 \end{pmatrix} \stackrel[\text{in } \mathbb{R}]{\text{D}} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 + \beta \cdot a_3 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel[\text{in } \mathbb{R}^3]{\text{Add.}} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \cdot a_1 \\ \beta \cdot a_2 \\ \beta \cdot a_3 \end{pmatrix} \stackrel[\text{in } \mathbb{R}^3]{\text{S-M.}} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}
 \end{aligned}$$

$$\text{(N')} \quad 1 \cdot \vec{a} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \stackrel[\text{in } \mathbb{R}^3]{\text{S-M.}} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_1 \\ 1 \cdot a_2 \\ 1 \cdot a_3 \end{pmatrix} \stackrel[\text{in } \mathbb{R}]{\text{N}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{a}$$