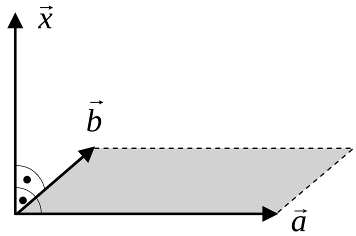
Das Vektorprodukt

Wir betrachten im dreidimensionalen Raum zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Gesucht ist ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, der auf jedem der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht, für den also gilt:

$$\vec{a} \perp \vec{x} \text{ und } \vec{b} \perp \vec{x}.$$



Die Aufgabe ist nicht eindeutig lösbar, da die Länge und auch die Richtung des Lösungsvektors nicht eindeutig bestimmt sind. Die Abbildung zeigt nur einen möglichen von den unendlich vielen Lösungsvektoren. Selbst unter den Vektoren der Länge 1 gibt es noch zwei (entgegengesetzt gerichtete) Lösungsvektoren.

Wir beschränken unsere Betrachtung auf den Fall zweier nicht kollinearer Vektoren. Auch im Fall kollinearer Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gibt es unendlich viele, sogar nicht kollineare Lösungsvektoren. Für geometrische Anwendungen ist dieser Sonderfall jedoch nicht von Interesse.

Die beiden Orthogonalitätsbedingungen bedeuten $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$ und $\vec{b} \cdot \vec{x} = 0$. Sie führen zu dem nebenstehenden Gleichungssystem:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 & = & 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Wegen $\vec{b} \neq \vec{0}$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b_1 \neq 0$ voraussetzen.

Das betrachtete Gleichungssystem ist unterbestimmt: es besteht aus nur zwei Gleichungen für drei Lösungsvariablen x_1, x_2 und x_3. Eine der Variablen kann daher frei gewählt werden.

Wegen $b_1 \neq 0$ können wir folgende Umformung durchführen:

$$\begin{cases} a_1 x_1 & + & a_2 x_2 & + & a_3 x_3 & = & 0 & \quad \text{(I)} \\ b_1 x_1 & + & b_2 x_2 & + & b_3 x_3 & = & 0 & \quad \text{(II)} \end{cases}$$

$$\underset{b_1 \cdot (\mathrm{I}) + (-a_1) \cdot (\mathrm{II})}{\Leftrightarrow} \begin{cases} & & (a_2 b_1 - a_1 b_2) \cdot x_2 & + & (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot x_3 & = & 0 \\ b_1 x_1 & + & b_2 x_2 & + & b_3 x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Ganz wesentlich hierbei ist, dass die Gleichung $-a_1 \cdot (\mathrm{II})$ gleich addiert wird. In diesem Fall ist es nicht notwendig $a_1 \neq 0$ vorauszusetzen. Für $a_1 = 0$ würde die erste Gleichung lediglich mit $b_1 \neq 0$ multipliziert.

Welche der Variablen x_2 oder x_3 frei gewählt werden, hängt von den Vorfaktoren ab. Wir erhalten folgende Fallunterscheidung:

1. Fall: $a_2 b_1 - a_1 b_2 \neq 0$

Wir wählen die Variable x_3 frei: $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$. Dann folgt:

$$x_2 = -\frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \cdot x_3 = -\frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \cdot \lambda$$

$$x_1 = -\frac{1}{b_1} \cdot (b_2 x_2 + b_3 x_3) = -\frac{1}{b_1} \cdot \left(-b_2 \cdot \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \cdot \lambda + b_3 \cdot \lambda \right) = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \cdot \lambda$$

$$x_3 = \lambda$$

Ein besonders einfacher unter den unendlich vielen Lösungsvektoren ergibt sich, wenn man speziell $\lambda = -(a_2 b_1 - a_1 b_2)$ wählt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

2. Fall: $a_3 b_1 - a_1 b_3 \neq 0$

Wir wählen die Variable x_2 frei: $x_2 = \lambda \in \mathbb{R}$. Dann folgt:

$$x_3 = -\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_3 b_1 - a_1 b_3} \cdot x_2 = -\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_3 b_1 - a_1 b_3} \cdot \lambda$$

$$x_1 = -\frac{1}{b_1} \cdot (b_2 x_2 + b_3 x_3) = -\frac{1}{b_1} \cdot (-b_2 \cdot \lambda - b_3 \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \cdot \lambda) = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_3 b_1 - a_1 b_3} \cdot \lambda$$

$$x_2 = \lambda$$

Wählt man zur Vereinfachung $\lambda = -(a_3 b_1 - a_1 b_3)$, so ergibt sich wieder:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

In beiden Fälle ergibt sich derselbe Lösungsvektor. Es bleibt jedoch noch der Fall zu betrachten, dass beide Differenzen den Wert 0 haben:

$$a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0 \quad \text{und} \quad a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0.$$

Die Voraussetzung $b_1 \neq 0$ legt folgende Umformung nahe:

$$a_2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot b_2 \quad \text{und} \quad a_3 = \frac{a_1}{b_1} \cdot b_3.$$

Da trivialerweise auch $a_1 = \frac{a_1}{b_1} \cdot b_1$ gilt, folgt insgesamt $\vec{a} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \vec{b}$.

Dies würde die Kollinearität von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bedeuten, die jedoch nach Voraussetzung ausgeschlossen ist.