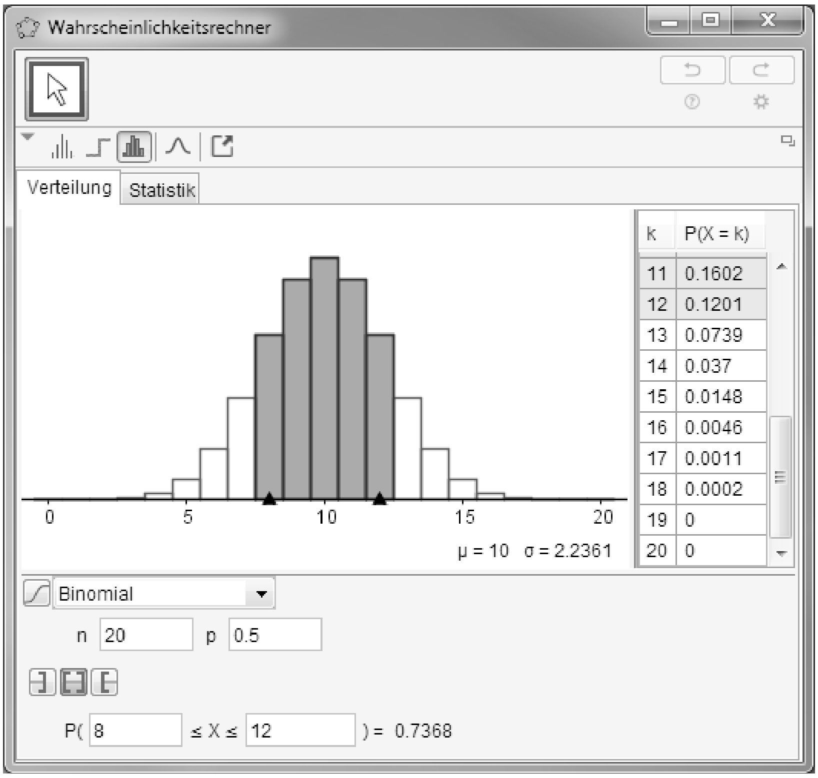
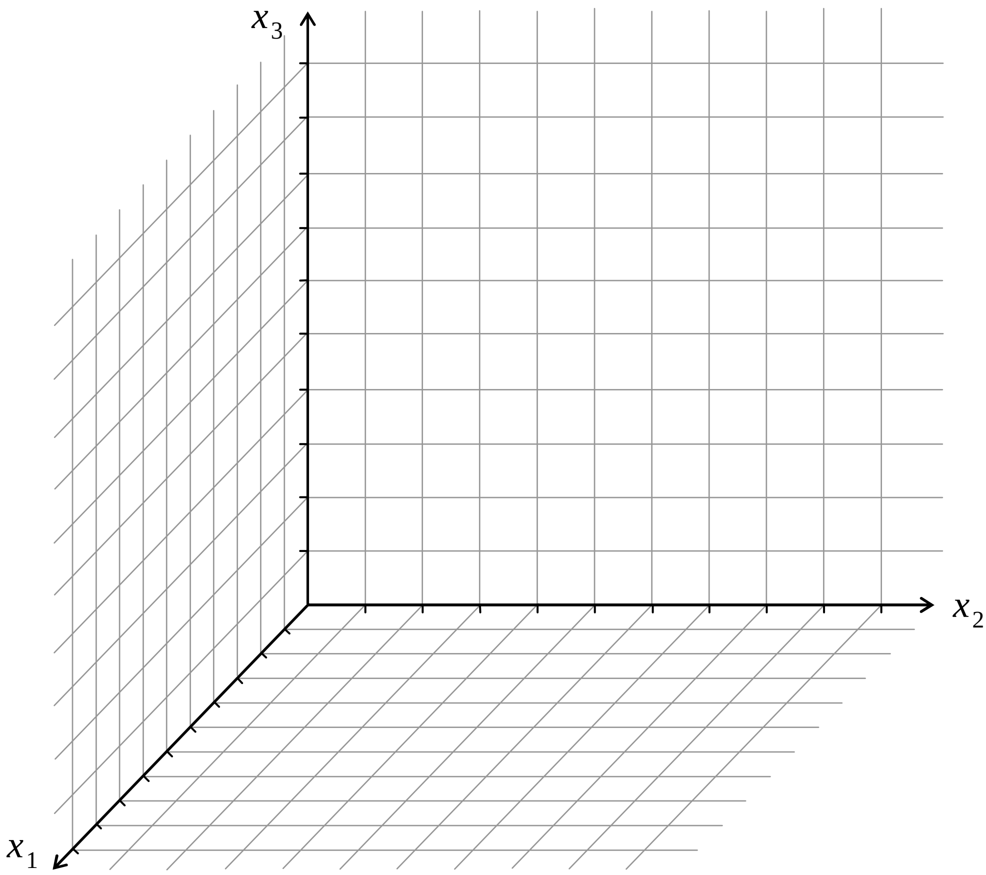
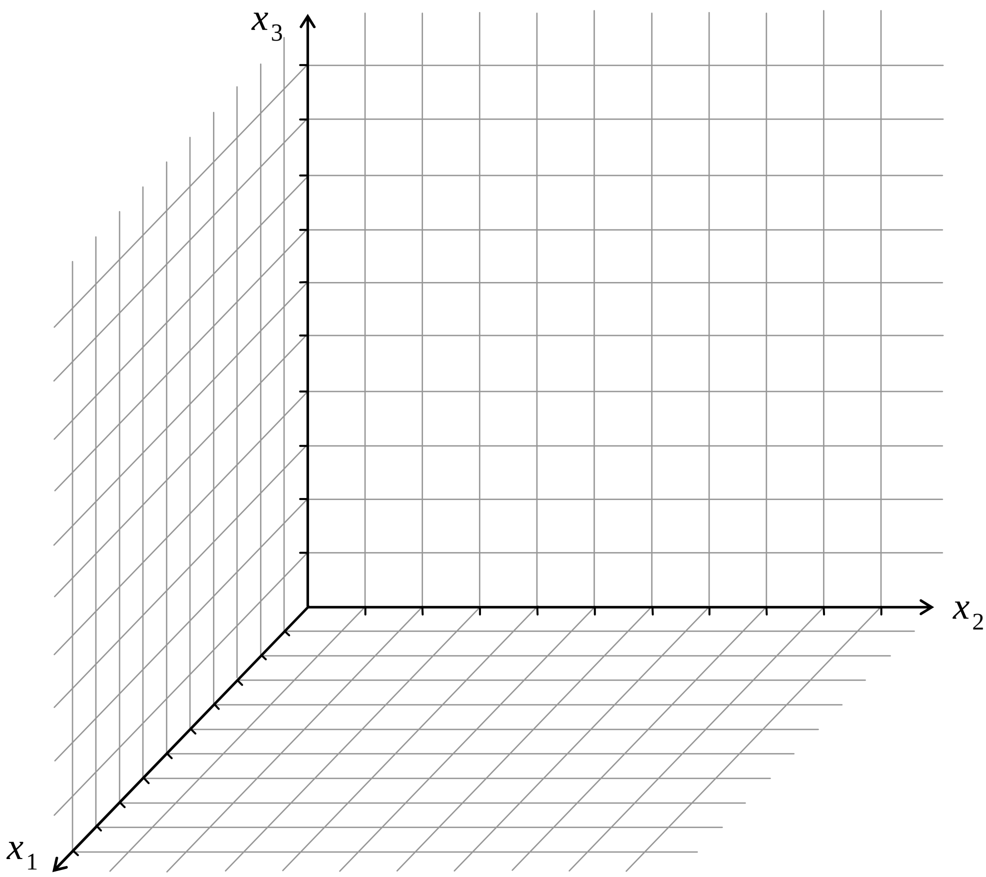
Berechnung von Summenwahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Ketten

Vor allem bei der Berechnung von Summenwahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Ketten bzw. binomialverteilten Zufallsgrößen ist die Verwendung elektronischer Hilfsmittel zeitgemäß und meistens auch unumgänglich.

Unter der großen Anzahl möglicher elektronischer Hilfsmittel soll das kostenfreie Programm GEOGEBRA erwähnt werden. Es verfügt seit der Version 4 über einen mächtigen Wahrscheinlichkeitsrechner (Ansicht → Wahrscheinlichkeitsrechner), der zudem sehr einfach zu bedienen ist.




x_3
x_2
x_1


x_3
x_2
x_1

Eigenschaften der Vektoraddition

Aufgrund der komponentenweisen Definition der Addition von Vektoren übertragen sich die Eigenschaften der Addition in $\mathbb{R}$ unverändert auf die Vektoraddition.

Für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ des $\mathbb{R}^3$ gilt:

Kommutativgesetz	(K^+)	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	Beim Addieren darf man die Reihenfolge der Vektoren vertauschen.
Assoziativgesetz	(A^+)	$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$	Beim Addieren darf man beliebig Klammern setzen.
Neutrales Element	(N^+)	$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$	Der Nullvektor $\vec{0}$ ist das neutrale Element der Addition.
Inverses Element	(I^+)	$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$	Jeder Vektor besitzt einen Gegenvektor.

Beweis

Für alle Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ gilt:

(K^+) $$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}\underset{\substack{(K^+).\\ \text{in }\mathbb{R}}}{=}\begin{pmatrix}b_1+a_1\\b_2+a_2\\b_3+a_3\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\vec{b}+\vec{a}$$

(A^+) $$\begin{aligned}\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) &= \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right)\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1+c_1\\b_2+c_2\\b_3+c_3\end{pmatrix}\\ &\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1+(b_1+c_1)\\a_2+(b_2+c_2)\\a_3+(b_3+c_3)\end{pmatrix}\underset{\substack{(A^+).\\ \text{in }\mathbb{R}}}{=}\begin{pmatrix}(a_1+b_1)+c_1\\(a_2+b_2)+c_2\\(a_3+b_3)+c_3\end{pmatrix}\\ &\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\\ &= (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}\end{aligned}$$

(N$^+$) $$\vec{a}+\vec{0}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1+0\\a_2+0\\a_3+0\end{pmatrix}\underset{\substack{(\text{N}^+)\\ \text{in }\mathbb{R}}}{=}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\vec{a}$$

(I$^+$) $$\vec{a}+(-\vec{a})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1+(-a_1)\\a_2+(-a_2)\\a_3+(-a_3)\end{pmatrix}\underset{\substack{(\text{I}^+)\\ \text{in }\mathbb{R}}}{=}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$$

Eigenschaften der Vektoraddition

Aufgrund der komponentenweisen Definition der Addition von Vektoren übertragen sich die Eigenschaften der Addition in $\mathbb{R}$ unverändert auf die Vektoraddition.

Für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ des $\mathbb{R}^3$ gilt:

Kommutativgesetz	(K^+)	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	Beim Addieren darf man die Reihenfolge der Vektoren vertauschen.
Assoziativgesetz	(A^+)	$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$	Beim Addieren darf man beliebig Klammern setzen.
Neutrales Element	(N^+)	$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$	Der Nullvektor $\vec{0}$ ist das neutrale Element der Addition.
Inverses Element	(I^+)	$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$	Jeder Vektor besitzt einen Gegenvektor.

Beweis

Für alle Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$(K^+)\quad \vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}\underset{\substack{(K^+).\\ \text{in }\mathbb{R}}}{=}\begin{pmatrix}b_1+a_1\\b_2+a_2\\b_3+a_3\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$\begin{aligned}(A^+)\quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) &= \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right)\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1+c_1\\b_2+c_2\\b_3+c_3\end{pmatrix}\\
&\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1+(b_1+c_1)\\a_2+(b_2+c_2)\\a_3+(b_3+c_3)\end{pmatrix}\underset{\substack{(A^+).\\ \text{in }\mathbb{R}}}{=}\begin{pmatrix}(a_1+b_1)+c_1\\(a_2+b_2)+c_2\\(a_3+b_3)+c_3\end{pmatrix}\\
&\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\\
&= (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}\end{aligned}$$

(N$^+$) $$\vec{a}+\vec{0}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Add.}\\\text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1+0\\a_2+0\\a_3+0\end{pmatrix}\underset{\substack{(\text{N}^+)\\\text{in }\mathbb{R}}}{=}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\vec{a}$$

(I$^+$) $$\vec{a}+(-\vec{a})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Add.}\\\text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1+(-a_1)\\a_2+(-a_2)\\a_3+(-a_3)\end{pmatrix}\underset{\substack{(\text{I}^+)\\\text{in }\mathbb{R}}}{=}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$$

Eigenschaften der S-Multiplikation

Da die Summe von Vektoren und auch die S-Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Vektor koordinatenweise erklärt sind, übertragen sich die Rechenregeln für reelle Zahlen sinngemäß.

Für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und für alle reellen Zahlen α, β gilt:

Assoziativgesetz	($\text{A}^\bullet$)	$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$
Erstes Distributivgesetz	(D1)	$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$
Zweites Distributivgesetz	(D2)	$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$
Gesetz vom neutralen Element	(N•)	$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Beweis

Für alle Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

($\text{A}^\bullet$)
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \left(\beta \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} \beta \cdot a_1 \\ \beta \cdot a_2 \\ \beta \cdot a_3 \end{pmatrix} \right) \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \cdot (\beta \cdot a_1) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot a_2) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot a_3) \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{\text{A}^\bullet \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} (\alpha \cdot \beta) \cdot a_1 \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot a_2 \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot a_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} (\alpha \cdot \beta) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$$

(D1)
$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \underset{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \cdot (a_1 + b_1) \\ \alpha \cdot (a_2 + b_2) \\ \alpha \cdot (a_3 + b_3) \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{\text{D} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot b_1 \\ \alpha \cdot a_2 + \alpha \cdot b_2 \\ \alpha \cdot a_3 + \alpha \cdot b_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \cdot b_1 \\ \alpha \cdot b_2 \\ \alpha \cdot b_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^{33}}}{=} \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
$$= \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

(D2) $$(\alpha+\beta)\cdot\vec{a} = (\alpha+\beta)\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)\cdot a_1 \\ (\alpha+\beta)\cdot a_2 \\ (\alpha+\beta)\cdot a_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{D} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_1+\beta\cdot a_1 \\ \alpha\cdot a_2+\beta\cdot a_2 \\ \alpha\cdot a_3+\beta\cdot a_3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_1 \\ \alpha\cdot a_2 \\ \alpha\cdot a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta\cdot a_1 \\ \beta\cdot a_2 \\ \beta\cdot a_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \alpha\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$$

(N$^{\bullet}$) $$1\cdot\vec{a} = 1\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} 1\cdot a_1 \\ 1\cdot a_2 \\ 1\cdot a_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{N} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

Eigenschaften des Betrags von Vektoren

Für die Betragsbildung bei Vektoren ergeben sich damit folgende Eigenschaften:

Eigenschaften des Betrages

Für alle Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $|\vec{a}| \geq 0$ (Nichtnegativität)

(2) $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

(3) $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ (Verträglichkeit mit dem Zahlenbetrag)

Beweis

Für alle Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) Es gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \geq 0$ (Die Wurzel ist nicht negativ.)

(2) Es gilt:

$$|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

(3) Es gilt:

$$|\lambda \cdot \vec{a}| = \left| \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(\lambda \cdot a_1)^2 + (\lambda \cdot a_2)^2 + (\lambda \cdot a_3)^2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 \cdot (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} = |\lambda| \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

Aus der Definition des Skalarprodukts und den Eigenschaften der Addition und der Multiplikation reeller Zahlen ergeben sich folgende Rechenregeln:

Rechenregeln für das Skalarprodukt		
Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:		
(1)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	(Kommutativgesetz)
(2)	$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	(Distributivgesetz)
(3)	$(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$	(Verträglichkeit mit der S-Multiplikation)

Beweis

Für alle Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1)
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$
$$\underset{\substack{\text{K}^+ \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

(2)
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \underset{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} a_1 \cdot (b_1 + c_1) + a_2 \cdot (b_2 + c_2) + a_3 \cdot (b_3 + c_3)$$
$$\underset{\substack{\text{D} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot b_3 + a_3 \cdot c_3$$
$$\underset{\substack{\text{K}^+, \text{A}^+ \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3) + (a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_3)$$
$$\underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$
$$= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

(3) $$(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} (\lambda \cdot a_1) \cdot b_1 + (\lambda \cdot a_2) \cdot b_2 + (\lambda \cdot a_3) \cdot b_3$$

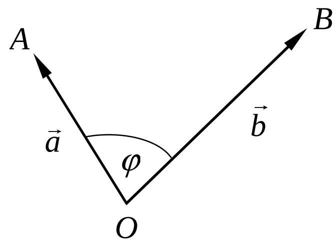
$$\underset{\substack{\text{A}^* \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \lambda \cdot (a_1 \cdot b_1) + \lambda \cdot (a_2 \cdot b_2) + \lambda \cdot (a_3 \cdot b_3)$$

$$\underset{\substack{\text{D} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \lambda \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)$$

$$\underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

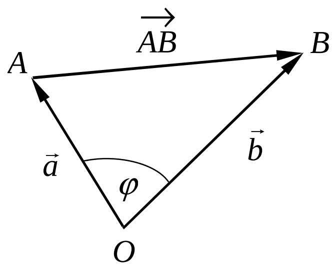
Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Unter dem Winkel $\sphericalangle\varphi$ zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den kleineren der beiden Winkel, den zwei vom gleichen Punkt ausgehende Verschiebungspfeile dieser Vektoren bilden. Gemäß dieser Festlegung gilt $0° \leq \varphi \leq 180°$.



In der Sekundarstufe I wurden in der Trigonometrie der Sinus- und der Kosinussatz bewiesen und damit Längen- und Winkelberechnung bei Dreiecken durchgeführt. Es ist daher nahe liegend, wenn wir uns auch bei der Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren an der Trigonometrie orientieren.

Als Ausgangpunkt unserer Betrachtungen ist der Kosinussatz geeignet. Er gilt in beliebigen Dreiecken und ist eine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras.



Für das Quadrat der Länge der Strecke $\overline{AB}$ gilt nach dem Kosinussatz:

$$|\overline{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi). \qquad (1)$$

Andererseits ergibt sich nach der Formel für den Abstand der Punkte A und B:

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3) \qquad (2) \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Gleichungen (1) und (2) ergibt sich:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Setzt man $|\vec{a}|, |\vec{b}| \neq 0$ voraus, so ergibt sich durch Division:

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Diese Formel für den Winkel zwischen zwei Vektoren lassen sich mithilfe des Skalarprodukts kürzer schreiben:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Winkelformel

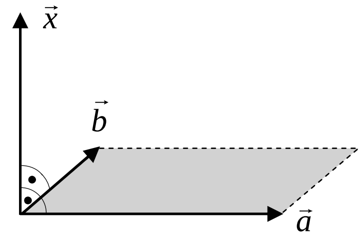
Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ gilt: $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ (**Winkelformel**)

Dabei ist φ das Maß des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Das Vektorprodukt

Wir betrachten im dreidimensionalen Raum zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{a},\vec{b}\in \mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$. Gesucht ist ein Vektor $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$, der auf jedem der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht, für den also gilt:

$$\vec{a}\perp\vec{x} \text{ und } \vec{b}\perp\vec{x}.$$



Die Aufgabe ist nicht eindeutig lösbar, da die Länge und auch die Richtung des Lösungsvektors nicht eindeutig bestimmt sind. Die Abbildung zeigt nur einen möglichen von den unendlich vielen Lösungsvektoren. Selbst unter den Vektoren der Länge 1 gibt es noch zwei (entgegengesetzt gerichtete) Lösungsvektoren.

Wir beschränken unsere Betrachtung auf den Fall zweier nicht kollinearer Vektoren. Auch im Fall kollinearer Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gibt es unendlich viele, sogar nicht kollineare Lösungsvektoren. Für geometrische Anwendungen ist dieser Sonderfall jedoch nicht von Interesse.

Die beiden Orthogonalitätsbedingungen bedeuten $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ und $\vec{b}\cdot\vec{x}=0$. Sie führen zu dem nebenstehenden Gleichungssystem:

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3 = 0 \end{cases}$$

Wegen $\vec{b}\neq\vec{0}$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b_1\neq 0$ voraussetzen.

Das betrachtete Gleichungssystem ist unterbestimmt: es besteht aus nur zwei Gleichungen für drei Lösungsvariablen x_1, x_2 und x_3. Eine der Variablen kann daher frei gewählt werden.

Wegen $b_1\neq 0$ können wir folgende Umformung durchführen:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 & \text{(I)} \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\underset{b_1\cdot(\mathrm{I})+(-a_1)\cdot(\mathrm{II})}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (a_2b_1-a_1b_2)\cdot x_2 + (a_3b_1-a_1b_3)\cdot x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{cases}$$

Ganz wesentlich hierbei ist, dass die Gleichung $-a_1\cdot(\mathrm{II})$ gleich addiert wird. In diesem Fall ist es nicht notwendig $a_1\neq 0$ vorauszusetzen. Für $a_1=0$ würde die erste Gleichung lediglich mit $b_1\neq 0$ multipliziert.

Welche der Variablen x_2 oder x_3 frei gewählt werden, hängt von den Vorfaktoren ab. Wir erhalten folgende Fallunterscheidung:

1. Fall: $a_2 b_1 - a_1 b_2 \neq 0$

Wir wählen die Variable x_3 frei: $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$. Dann folgt:

$$x_2 = -\frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \cdot x_3 = -\frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \cdot \lambda$$

$$x_1 = -\frac{1}{b_1} \cdot (b_2 x_2 + b_3 x_3) = -\frac{1}{b_1} \cdot \left(-b_2 \cdot \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \cdot \lambda + b_3 \cdot \lambda \right) = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \cdot \lambda$$

$$x_3 = \lambda$$

Ein besonders einfacher unter den unendlich vielen Lösungsvektoren ergibt sich, wenn man speziell $\lambda = -(a_2 b_1 - a_1 b_2)$ wählt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

2. Fall: $a_3 b_1 - a_1 b_3 \neq 0$

Wir wählen die Variable x_2 frei: $x_2 = \lambda \in \mathbb{R}$. Dann folgt:

$$x_3 = -\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_3 b_1 - a_1 b_3} \cdot x_2 = -\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_3 b_1 - a_1 b_3} \cdot \lambda$$

$$x_1 = -\frac{1}{b_1} \cdot (b_2 x_2 + b_3 x_3) = -\frac{1}{b_1} \cdot (-b_2 \cdot \lambda - b_3 \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \cdot \lambda) = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_3 b_1 - a_1 b_3} \cdot \lambda$$

$$x_2 = \lambda$$

Wählt man zur Vereinfachung $\lambda = -(a_3 b_1 - a_1 b_3)$, so ergibt sich wieder:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

In beiden Fälle ergibt sich derselbe Lösungsvektor. Es bleibt jedoch noch der Fall zu betrachten, dass beide Differenzen den Wert 0 haben:

$$a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0 \quad \text{und} \quad a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0.$$

Die Voraussetzung $b_1 \neq 0$ legt folgende Umformung nahe:

$$a_2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot b_2 \quad \text{und} \quad a_3 = \frac{a_1}{b_1} \cdot b_3.$$

Da trivialerweise auch $a_1 = \frac{a_1}{b_1} \cdot b_1$ gilt, folgt insgesamt $\vec{a} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \vec{b}$.

Dies würde die Kollinearität von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bedeuten, die jedoch nach Voraussetzung ausgeschlossen ist.

Rechenregeln für das Vektorprodukt

Wie beim Skalarprodukt lassen sich auch aus der Definition des Vektorprodukts Rechenregeln ableiten. Sie sind nachfolgend in einer Übersicht zusammengefasst:

Rechenregeln für das Vektorprodukt

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (Antisymmetrie)

(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgesetz)

(3) $(\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ (Verträglichkeit mit S-Multiplikat.)

(4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Beweis

Für alle Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_3 b_2 - a_2 b_3) \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ -(a_2 b_1 - a_1 b_2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_3 b_2 - a_2 b_3 \\ a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ a_2 b_1 - a_1 b_2 \end{pmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

(2) $$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 (b_3 + c_3) - a_3 (b_2 + c_2) \\ a_3 (b_1 + c_1) - a_1 (b_3 + c_3) \\ a_1 (b_2 + c_2) - a_2 (b_1 + c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 + a_2 c_3 - a_3 b_2 - a_3 c_2 \\ a_3 b_1 + a_3 c_1 - a_1 b_3 - a_1 c_3 \\ a_1 b_2 + a_1 c_2 - a_2 b_1 - a_2 c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_2 b_3 - a_3 b_2) + (a_2 c_3 - a_3 c_2) \\ (a_3 b_1 - a_1 b_3) + (a_3 c_1 - a_1 c_3) \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_1 c_2 - a_2 c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 c_3 - a_3 c_2 \\ a_3 c_1 - a_1 c_3 \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

(3)
$$(\lambda\cdot\vec{a})\times\vec{b}=\left(\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_1\\\lambda\cdot a_2\\\lambda\cdot a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\lambda\cdot a_2)b_3-(\lambda\cdot a_3)b_2\\(\lambda\cdot a_3)b_1-(\lambda\cdot a_1)b_3\\(\lambda\cdot a_1)b_2-(\lambda\cdot(a_2)b_1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda\cdot(a_2b_3-a_3b_2)\\\lambda\cdot(a_3b_1-a_1b_3)\\\lambda\cdot(a_1b_2-a_2b_1)\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$
$$=\lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\lambda\cdot\vec{b})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\left(\lambda\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\lambda\cdot b_1\\\lambda\cdot b_2\\\lambda\cdot b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2(\lambda\cdot b_3)-a_3(\lambda\cdot b_2)\\a_3(\lambda\cdot b_1)-a_1(\lambda\cdot b_3)\\a_1(\lambda\cdot b_2)-a_2(\lambda\cdot b_1)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda\cdot(a_2b_3-a_3b_2)\\\lambda\cdot(a_3b_1-a_1b_3)\\\lambda\cdot(a_1b_2-a_2b_1)\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$
$$=\lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

(4)
$$\vec{a}\times\vec{a}=\begin{pmatrix}a_2a_3-a_3a_2\\a_3a_1-a_1a_3\\a_1a_2-a_2a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$$

Formel für den Betrag des Vektorprodukts

Zu zwei nicht kollinearen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gibt es unendlich viele Vektoren unterschiedlicher Länge, die auf der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene senkrecht stehen. Der Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ ist ein markanter unter ihnen.

Man kann daher die Frage stellen, ob der Länge des Vektors $\vec{a}\times\vec{b}$ auch eine inhaltliche Bedeutung zukommt. Folgende (recht trickreiche) Betrachtung erlaubt es, den Betrag von $\vec{a}\times\vec{b}$ geometrisch zu deuten:

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= (\vec{a}\times\vec{b})^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\
&= a_2^2 b_3^2 - 2 a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 - 2 a_3 b_1 a_1 b_3 + a_1^2 b_3^2 \\
&\qquad + a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 \\
&= a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 \\
&\qquad - 2\cdot(a_1 b_1 a_2 b_2 + a_1 b_1 a_3 b_3 + a_2 b_2 a_3 b_3) \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\
&= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi))^2 \\
&= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\varphi) = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (1-\cos^2(\varphi)) \\
&= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\varphi).
\end{aligned}
$$

Insgesamt folgt also: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\varphi)$, wobei φ das Maß des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Wegen $0° \le \varphi \le 180°$ gilt $\sin(\varphi) \ge 0$ und man erhält durch Wurzelziehen:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi).$$

Diese Zahl ist die Maßzahl des Flächeninhalts des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.