Eigenschaften der Vektoraddition

Aufgrund der komponentenweisen Definition der Addition von Vektoren übertragen sich die Eigenschaften der Addition in $\mathbb{R}$ unverändert auf die Vektoraddition.

Für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ des $\mathbb{R}^3$ gilt:

Kommutativgesetz	(K^+)	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	Beim Addieren darf man die Reihenfolge der Vektoren vertauschen.
Assoziativgesetz	(A^+)	$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$	Beim Addieren darf man beliebig Klammern setzen.
Neutrales Element	(N^+)	$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$	Der Nullvektor $\vec{0}$ ist das neutrale Element der Addition.
Inverses Element	(I^+)	$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$	Jeder Vektor besitzt einen Gegenvektor.

Beweis

Für alle Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$(K^+)\quad \vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}\underset{\substack{(K^+).\\ \text{in }\mathbb{R}}}{=}\begin{pmatrix}b_1+a_1\\b_2+a_2\\b_3+a_3\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$\begin{aligned}(A^+)\quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) &= \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right)\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1+c_1\\b_2+c_2\\b_3+c_3\end{pmatrix}\\
&\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1+(b_1+c_1)\\a_2+(b_2+c_2)\\a_3+(b_3+c_3)\end{pmatrix}\underset{\substack{(A^+).\\ \text{in }\mathbb{R}}}{=}\begin{pmatrix}(a_1+b_1)+c_1\\(a_2+b_2)+c_2\\(a_3+b_3)+c_3\end{pmatrix}\\
&\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in }\mathbb{R}^3}}{=}\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\\
&= (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}\end{aligned}$$

(N$^+$) $$\vec{a}+\vec{0}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} a_1+0 \\ a_2+0 \\ a_3+0 \end{pmatrix} \underset{\substack{(\mathrm{N}^+) \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\vec{a}$$

(I$^+$) $$\vec{a}+(-\vec{a})=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} a_1+(-a_1) \\ a_2+(-a_2) \\ a_3+(-a_3) \end{pmatrix} \underset{\substack{(\mathrm{I}^+) \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\vec{0}$$