Formel für den Betrag des Vektorprodukts

Zu zwei nicht kollinearen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gibt es unendlich viele Vektoren unterschiedlicher Länge, die auf der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene senkrecht stehen. Der Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ ist ein markanter unter ihnen.

Man kann daher die Frage stellen, ob der Länge des Vektors $\vec{a}\times\vec{b}$ auch eine inhaltliche Bedeutung zukommt. Folgende (recht trickreiche) Betrachtung erlaubt es, den Betrag von $\vec{a}\times\vec{b}$ geometrisch zu deuten:

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= (\vec{a}\times\vec{b})^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\
&= a_2^2 b_3^2 - 2 a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 - 2 a_3 b_1 a_1 b_3 + a_1^2 b_3^2 \\
&\qquad + a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 \\
&= a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 \\
&\qquad - 2\cdot(a_1 b_1 a_2 b_2 + a_1 b_1 a_3 b_3 + a_2 b_2 a_3 b_3) \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\
&= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2 - (|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi))^2 \\
&= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\cos^2(\varphi) = |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot(1-\cos^2(\varphi)) \\
&= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin^2(\varphi).
\end{aligned}
$$

Insgesamt folgt also: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin^2(\varphi)$, wobei φ das Maß des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Wegen $0°\le\varphi\le 180°$ gilt $\sin(\varphi)\ge 0$ und man erhält durch Wurzelziehen:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi).$$

Diese Zahl ist die Maßzahl des Flächeninhalts des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.