

Eigenschaften der Vektoraddition

Aufgrund der komponentenweisen Definition der Addition von Vektoren übertragen sich die Eigenschaften der Addition in \mathbb{R}^n unverändert auf die Vektoraddition.

Für alle Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} des \mathbb{R}^3 gilt:

Kommutativgesetz	(K ⁺)	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	Beim Addieren darf man die Reihenfolge der Vektoren vertauschen.
Assoziativgesetz	(A ⁺)	$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	Beim Addieren darf man beliebig Klammern setzen.
Neutrales Element	(N ⁺)	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	Der Nullvektor $\vec{0}$ ist das neutrale Element der Addition.
Inverses Element	(I ⁺)	$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	Jeder Vektor besitzt einen Gegenvektor.

Beweis

Für alle Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ des \mathbb{R}^3 gilt:

$$(K^+) \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Add. in } \mathbb{R}^3}{=} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \stackrel{(K^+), \text{ in } \mathbb{R}}{=} \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Add. in } \mathbb{R}^3}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\begin{aligned} (A^+) \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \stackrel{\text{Add. in } \mathbb{R}^3}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{Add. in } \mathbb{R}^3}{=} \begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ a_2 + (b_2 + c_2) \\ a_3 + (b_3 + c_3) \end{pmatrix} \stackrel{(A^+), \text{ in } \mathbb{R}}{=} \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ (a_3 + b_3) + c_3 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{Add. in } \mathbb{R}^3}{=} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \end{aligned}$$

$$(N^+) \quad \vec{a} + \vec{0} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \\ a_3 + 0 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{(N^+) \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

$$(I^+) \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} a_1 + (-a_1) \\ a_2 + (-a_2) \\ a_3 + (-a_3) \end{pmatrix} \stackrel{\substack{(I^+) \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$