# Eigenschaften des Skalarprodukts

Aus der Definition des Skalarprodukts und den Eigenschaften der Addition und der Multiplikation reeller Zahlen ergeben sich folgende Rechenregeln:

**Rechenregeln für das Skalarprodukt**

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ | (Kommutativgesetz) |
| (2) | $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ | (Distributivgesetz) |
| (3) | $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ | (Verträglichkeit mit der S-Multiplikation) |

**Beweis**

Für alle Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1)

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \\
&\underset{\substack{\text{K}^+ \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} \cdot \vec{a}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \underset{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} \\
&\underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} a_1 \cdot (b_1 + c_1) + a_2 \cdot (b_2 + c_2) + a_3 \cdot (b_3 + c_3) \\
&\underset{\substack{\text{D} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot b_3 + a_3 \cdot c_3 \\
&\underset{\substack{\text{K}^+,\ \text{A}^+ \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3) + (a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_3) \\
&\underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

(3) $$(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \left( \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} (\lambda \cdot a_1) \cdot b_1 + (\lambda \cdot a_2) \cdot b_2 + (\lambda \cdot a_3) \cdot b_3$$

$$\underset{\substack{\text{A}^* \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \lambda \cdot (a_1 \cdot b_1) + \lambda \cdot (a_2 \cdot b_2) + \lambda \cdot (a_3 \cdot b_3)$$

$$\underset{\substack{\text{D} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \lambda \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)$$

$$\underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \lambda \cdot \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$