

## Eigenschaften des Betrags von Vektoren

Für die Betragsbildung bei Vektoren ergeben sich damit folgende Eigenschaften:

### Eigenschaften des Betrages

Für alle Vektoren  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- (1)  $|\vec{a}| \geq 0$  (Nichtnegativität)
- (2)  $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- (3)  $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$  (Verträglichkeit mit dem Zahlenbetrag)

### Beweis

Für alle Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  des  $\mathbb{R}^3$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- (1) Es gilt:  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \geq 0$  (Die Wurzel ist nicht negativ.)

- (2) Es gilt:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge a_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \end{aligned}$$

- (3) Es gilt:

$$\begin{aligned} |\lambda \cdot \vec{a}| &= \left| \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(\lambda \cdot a_1)^2 + (\lambda \cdot a_2)^2 + (\lambda \cdot a_3)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \cdot (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} = |\lambda| \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \end{aligned}$$