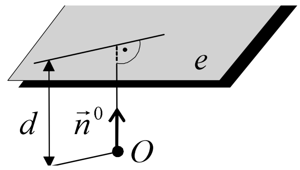
Bedeutung des Vorzeichens des Terms $\vec{n}^0 \cdot \vec{p} - d$ in der Hesseform

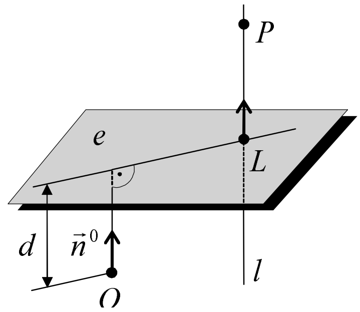


Wir betrachten eine Ebene *e* in der Hesseform

$$\vec{n}^0 \cdot \vec{x} - d = 0 \quad \text{mit } d > 0.$$

Dann zeigt der Normaleneinheitsvektor wie abgebildet (im Ursprung abgetragen) von *O* zu *e*.

Gesucht ist für einen Punkt *P* der Abstand $d(P;e)$ von *e*. Dieser gesuchte Abstand ist die Länge des Lots von *P* auf *e*.



Wir betrachten diejenige Lotgerade *l* zu *e*, die durch *P* verläuft. Eine Gleichung dieser Gerade ist

$$l\colon\ \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{n}^0.$$

Die Lotgerade *l* schneidet die Ebene im Lotfußpunkt *L*.

Die Koordinaten des Lotfußpunkts *L* lassen sich durch Einsetzen der Gleichung von *l* in die Hessegleichung von *e* berechnen:

$$\vec{n}^0 \cdot (\vec{p} + \lambda \cdot \vec{n}^0) - d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}^0 \cdot \vec{p} + \lambda \cdot \underbrace{\vec{n}^0 \cdot \vec{n}^0}_{=1} - d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{n}^0 \cdot \vec{p} + \lambda - d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = -d + \vec{n}^0 \cdot \vec{p}$$

Für den Ortsvektor des Lotfußpunkts *L* folgt damit:

$$\overrightarrow{OL} = \vec{l} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{n}^0 = \vec{p} + (-d + \vec{n}^0 \cdot \vec{p}) \cdot \vec{n}^0.$$

Für den Verbindungsvektor von *P* und *L* ergibt sich:

$$\overrightarrow{LP} = \vec{p} - \vec{l} = -(-d + \vec{n}^0 \cdot \vec{p}) \cdot \vec{n}^0 = (\vec{n}^0 \cdot \vec{p} - d) \cdot \vec{n}^0. \qquad (*)$$

Für den gesuchten Abstand folgt damit (wie bei der Betrachtung zur Hesseform)

$$d(P;e) = |\overrightarrow{LP}| = |(\vec{n}^0 \cdot \vec{p} - d) \cdot \vec{n}^0| = |\vec{n}^0 \cdot \vec{p} - d| \cdot \underbrace{|\vec{n}^0|}_{=1} = |\vec{n}^0 \cdot \vec{p} - d|.$$

Aus der Gleichung (*) lässt sich die geometrische Bedeutung des Vorzeichens von $\vec{n}^0 \cdot \vec{p} - d$ gewinnen:

- Gilt $\vec{n}^0 \cdot \vec{p} - d > 0$, so hat $\overrightarrow{LP}$ (wie in der Abbildung) dieselbe Richtung wie $\vec{n}^0$.
  $\overrightarrow{LP}$ zeigt also in den Halbraum bezüglich *e*, in dem der Ursprung nicht liegt.
  Man sagt auch: *O* und *P* liegen in verschiedenen Halbräumen bezüglich *e*.
- Gilt $\vec{n}^0 \cdot \vec{p} - d < 0$, so hat $\overrightarrow{LP}$ die entgegen gesetzte Richtung wie $\vec{n}^0$.
  $\overrightarrow{LP}$ zeigt also in den Halbraum bezüglich *e*, in dem auch Ursprung liegt.
  Man sagt auch: *O* und *P* liegen im gleichen Halbraum bezüglich *e*.
- Gilt $\vec{n}^0 \cdot \vec{p} - d = 0$, so erfüllt *P* die Ebenengleichung von *e*.
  P liegt in diesem Fall in *e*, für den Abstand gilt $d(P;e) = 0$