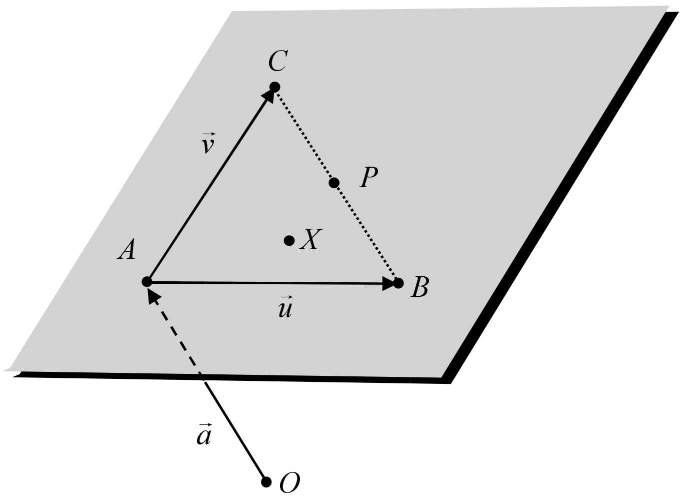
Vektorielle Beschreibung der Dreiecksfläche



Wir suchen nach einer Bedingung, durch die alle Punkte beschrieben werden können, die innerhalb des Dreiecks *ABC* liegen.

Wir betrachten zunächst die Punkte *P* in der Randlage auf der Dreiecksseite $\overline{BC}$.

Die Punkte *P* liegen innerhalb des Parallelogramms, welches von den nicht kollinearen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird.

Es gibt daher Zahlen $\lambda, \mu \in [0\,;1]$, sodass gilt:

$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}\,.$$

Andererseits gilt:

$$\vec{p} = (\vec{a} + \vec{u}) + \nu \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{a} + \vec{u}) + \nu \cdot (-\vec{u} + \vec{v})\,.$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich:

$$\vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = (\vec{a} + \vec{u}) + \nu \cdot (-\vec{u} + \vec{v})$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda - 1 + \nu) \cdot \vec{u} + (\mu - \nu) \cdot \vec{v} = \vec{0}.$$

Da die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht kollinear sind, folgt:

$$\lambda - 1 + \nu = 0 \quad \text{und} \quad \mu - \nu = 0\,.$$

Hieraus ergibt sich die Bedingung: $\lambda + \mu = 1$.

Die Dreiecksfläche wird daher durch folgende Punktmenge beschrieben:

$$\left\{ X \in E^3 \;\middle|\; \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \;\text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}_0^+ \text{ und } \lambda + \mu \leq 1 \right\}.$$