Rechenregeln für das Vektorprodukt

Wie beim Skalarprodukt lassen sich auch aus der Definition des Vektorprodukts Rechenregeln ableiten. Sie sind nachfolgend in einer Übersicht zusammengefasst:

Rechenregeln für das Vektorprodukt

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (Antisymmetrie)

(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgesetz)

(3) $(\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ (Verträglichkeit mit S-Multiplikation)

(4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Beweis

Für alle Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_3 b_2 - a_2 b_3) \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ -(a_2 b_1 - a_1 b_2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_3 b_2 - a_2 b_3 \\ a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ a_2 b_1 - a_1 b_2 \end{pmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

(2) $$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 (b_3 + c_3) - a_3 (b_2 + c_2) \\ a_3 (b_1 + c_1) - a_1 (b_3 + c_3) \\ a_1 (b_2 + c_2) - a_2 (b_1 + c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 + a_2 c_3 - a_3 b_2 - a_3 c_2 \\ a_3 b_1 + a_3 c_1 - a_1 b_3 - a_1 c_3 \\ a_1 b_2 + a_1 c_2 - a_2 b_1 - a_2 c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_2 b_3 - a_3 b_2) + (a_2 c_3 - a_3 c_2) \\ (a_3 b_1 - a_1 b_3) + (a_3 c_1 - a_1 c_3) \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_1 c_2 - a_2 c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 c_3 - a_3 c_2 \\ a_3 c_1 - a_1 c_3 \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

(3) $$(\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda \cdot a_2) b_3 - (\lambda \cdot a_3) b_2 \\ (\lambda \cdot a_3) b_1 - (\lambda \cdot a_1) b_3 \\ (\lambda \cdot a_1) b_2 - (\lambda \cdot (a_2) b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ \lambda \cdot (a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ \lambda \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda \cdot b_1 \\ \lambda \cdot b_2 \\ \lambda \cdot b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 (\lambda \cdot b_3) - a_3 (\lambda \cdot b_2) \\ a_3 (\lambda \cdot b_1) - a_1 (\lambda \cdot b_3) \\ a_1 (\lambda \cdot b_2) - a_2 (\lambda \cdot b_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ \lambda \cdot (a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ \lambda \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

(4) $$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} a_2 a_3 - a_3 a_2 \\ a_3 a_1 - a_1 a_3 \\ a_1 a_2 - a_2 a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$