Eigenschaften des Betrags von Vektoren

Für die Betragsbildung bei Vektoren ergeben sich damit folgende Eigenschaften:

Eigenschaften des Betrages

Für alle Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $|\vec{a}| \geq 0$ (Nichtnegativität)

(2) $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

(3) $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ (Verträglichkeit mit dem Zahlenbetrag)

Beweis

Für alle Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) Es gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \geq 0$ (Die Wurzel ist nicht negativ.)

(2) Es gilt:

$$|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

(3) Es gilt:

$$|\lambda \cdot \vec{a}| = \left| \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(\lambda \cdot a_1)^2 + (\lambda \cdot a_2)^2 + (\lambda \cdot a_3)^2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 \cdot (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} = |\lambda| \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$