Eigenschaften der S-Multiplikation

Da die Summe von Vektoren und auch die S-Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Vektor koordinatenweise erklärt sind, übertragen sich die Rechenregeln für reelle Zahlen sinngemäß.

Für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und für alle reellen Zahlen α, β gilt:

Assoziativgesetz	($A^{\bullet}$)	$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$
Erstes Distributivgesetz	(D1)	$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$
Zweites Distributivgesetz	(D2)	$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$
Gesetz vom neutralen Element	(N•)	$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Beweis

Für alle Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

($A^{\bullet}$)
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \left(\beta \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} \beta \cdot a_1 \\ \beta \cdot a_2 \\ \beta \cdot a_3 \end{pmatrix} \right) \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \cdot (\beta \cdot a_1) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot a_2) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot a_3) \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{A^{\bullet} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} (\alpha \cdot \beta) \cdot a_1 \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot a_2 \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot a_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} (\alpha \cdot \beta) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$$

(D1)
$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \underset{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \cdot (a_1 + b_1) \\ \alpha \cdot (a_2 + b_2) \\ \alpha \cdot (a_3 + b_3) \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{\text{D} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot b_1 \\ \alpha \cdot a_2 + \alpha \cdot b_2 \\ \alpha \cdot a_3 + \alpha \cdot b_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \cdot b_1 \\ \alpha \cdot b_2 \\ \alpha \cdot b_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.} \\ \text{in } \mathbb{R}^{33}}}{=} \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
$$= \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

(D2) $$(\alpha+\beta)\cdot\vec{a} = (\alpha+\beta)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.}\\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix}(\alpha+\beta)\cdot a_1\\(\alpha+\beta)\cdot a_2\\(\alpha+\beta)\cdot a_3\end{pmatrix} \underset{\substack{\text{D}\\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix}\alpha\cdot a_1+\beta\cdot a_1\\\alpha\cdot a_2+\beta\cdot a_2\\\alpha\cdot a_3+\beta\cdot a_3\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix}\alpha\cdot a_1\\\alpha\cdot a_2\\\alpha\cdot a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\cdot a_1\\\beta\cdot a_2\\\beta\cdot a_3\end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.}\\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \alpha\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$$

($N^{\bullet}$) $$1\cdot\vec{a}=1\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-M.}\\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix}1\cdot a_1\\1\cdot a_2\\1\cdot a_3\end{pmatrix} \underset{\substack{\text{N}\\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\vec{a}$$