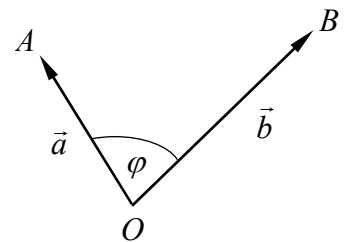


Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Unter dem Winkel φ zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren \vec{a} und \vec{b} versteht man den kleineren der beiden Winkel, den zwei vom gleichen Punkt ausgehende Verschiebungspfeile dieser Vektoren bilden. Gemäß dieser Festlegung gilt $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$.



In der Sekundarstufe I wurden in der Trigonometrie der Sinus- und der Kosinussatz bewiesen und damit Längen- und Winkelberechnung bei Dreiecken durchgeführt. Es ist daher nahe liegend, wenn wir uns auch bei der Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren an der Trigonometrie orientieren.

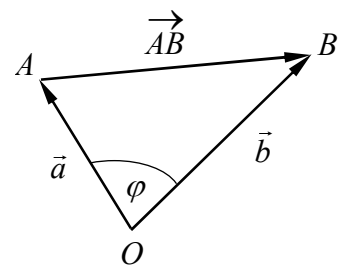
Als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist der Kosinussatz geeignet. Er gilt in beliebigen Dreiecken und ist eine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras.

Für das Quadrat der Länge der Strecke \overline{AB} gilt nach dem Kosinussatz:

$$|\overline{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi). \quad (1)$$

Andererseits ergibt sich nach der Formel für den Abstand der Punkte A und B:

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3) \end{aligned} \quad (2)$$



Durch Vergleich der Gleichungen (1) und (2) ergibt sich:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Setzt man $|\vec{a}|, |\vec{b}| \neq 0$ voraus, so ergibt sich durch Division:

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Diese Formel für den Winkel zwischen zwei Vektoren lassen sich mithilfe des Skalarprodukts kürzer schreiben:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Winkelformel

Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ gilt: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ (Winkelformel)

Dabei ist φ das Maß des Winkels zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} .