# Schriftliche Abiturprüfung 2013

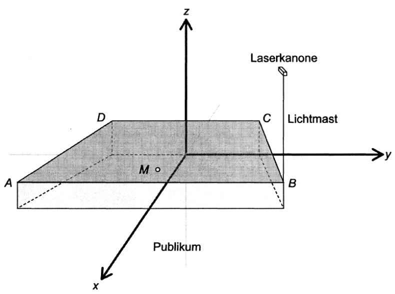
## E-Kurs

## Haupttermin

### Themenübersicht

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung der gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x - 1}$
  - Übergang zur Funktionenschar $f_a(x) = \frac{a \cdot x^2 - 1}{x - 1}$
  - Zuordnung von Graphen zu Funktionen der Schar
  - Betrachtung von Rotationskörpern zur Funktion $g(x) = \sqrt{9 - (x-3)^2}$

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Flächeninhalt eines Trapezes
  - Umkreismittelpunkt
  - Schnitt einer Ebene mit einer Geraden
  - Winkel zwischen zwei Ebenen
  - Abstand Punkt-Gerade




- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel (mit absoluten Werten)
  - Kombinatorische Berechnung von Wahrscheinlich
  - Bernoulli-Kette

SOFTFRUTTI verlag
www.softfrutti.de

# Aufgabe 1
# ANALYSIS

**1.1** Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x - 1}$.

1.1.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion *f* an und berechnen Sie die beiden Nullstellen.

Zeigen Sie, dass der Funktionsterm in der Form $4 \cdot x + 4 + \frac{3}{x - 1}$ dargestellt werden kann.

1.1.2 Der Graph der Funktion *f* schließt mit der *x*-Achse eine Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt.

1.1.3 Der Graph der Funktion *f* wird um 1 Längeneinheit in negative *x*-Richtung und um 8 Längeneinheiten in negative *y* -Richtung verschoben.

1.1.3.1 Zeigen Sie, dass der neue Graph die Gleichung $y = 4 \cdot x + \frac{3}{x}$ hat.

1.1.3.2 Untersuchen Sie den neuen Graphen auf einfache Symmetrie.

**1.2** Die Funktion *f* aus 1.1 gehört zu einer Funktionenschar, die gegeben ist durch

$$f_a: D_{\max} \to \mathbb{R} \text{ mit } f_a(x) = \frac{a \cdot x^2 - 1}{x - 1} \text{ mit } a \in \mathbb{R}_0^+ .$$

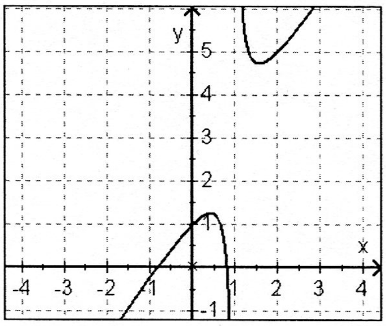
1.2.1 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von *a* die maximale Definitionsmenge von $f_a$ und die Art der Definitionslücke. Zeichnen Sie den Graph von $f_1$.

1.2.2 Zeigen Sie, dass die Geraden $y = a \cdot x + a$ Asymptoten der Funktionen $f_a$ sind und dass diese Geraden genau einen Punkt *S* gemeinsam haben.

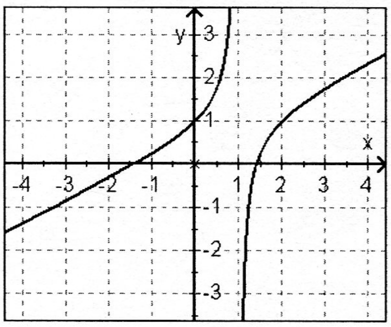
1.2.3 Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung von $f_a$ gilt: $f'_a(x) = \frac{a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x + 1}{(x - 1)^2}$

1.2.4 Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_a$ nur für $a > 1$ waagerechte Tangenten besitzen.

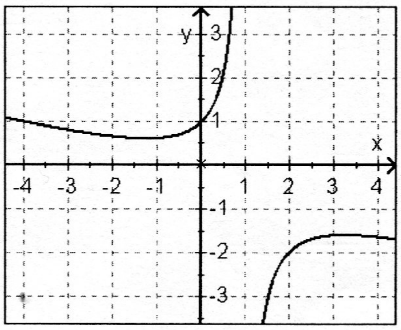
1.2.5 Ordnen Sie die Parameterwerte $a = 0{,}5$ bzw. $a = 1{,}5$ zweien der unten abgebildeten Graphen passend zu.
Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie jeweils beschreiben, wie zwei charakteristische Eigenschaften des Graphen von $f_a$ sich beim Übergang von $a < 1$ zu $a > 1$ ändern.



Graph 1



Graph 2



Graph 3

**1.3** Gegeben ist die Funktion $g : [0\,;\,6] \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto \sqrt{9-(x-3)^2}$ .

1.3.1 Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen der Funktion $g$.

Zeigen Sie anhand einer Rechnung, dass alle Punkte des Graphen $g$ denselben Abstand vom Punkt $M(3 \mid 0)$ haben.

1.3.2 Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $g$ und der $x$-Achse rotiert über dem Intervall $[0\,;\,h]$ um die $x$-Achse (wobei $0 < h \leq 6$ gilt) und erzeugt so einen Rotationskörper.

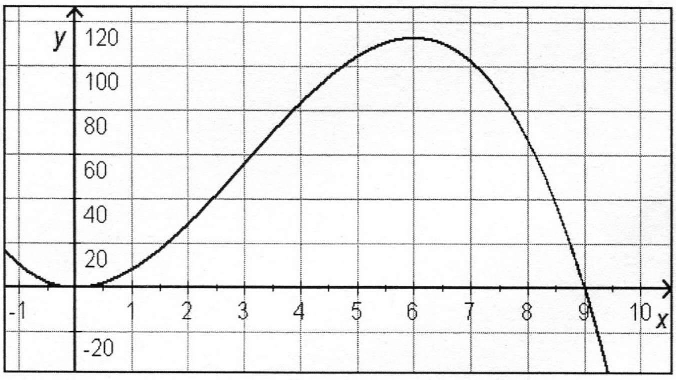
1.3.2.1 Berechnen Sie das Volumen dieses Rotationskörpers für $h = 6$.

1.3.2.2 Beschreiben Sie die Form dieses Rotationskörpers in Abhängigkeit von $h$ für $0 < h < 6$ .

1.3.2.3 Bestimmen Sie mit Hilfe der Integralrechnung eine Formel für das Volumen des Rotationskörpers in Abhängigkeit von $h$.

1.3.3 Der nachstehende Graph gehört zur Funktion $V$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot (9-x)$ .

Über dem Intervall $[0\,;\,6]$ beschreibt $V$ das Füllvolumen eines Kugeltanks (siehe Foto) mit dem Innendurchmesser 6 Längeneinheiten in Abhängigkeit von der Füllhöhe $x$ .



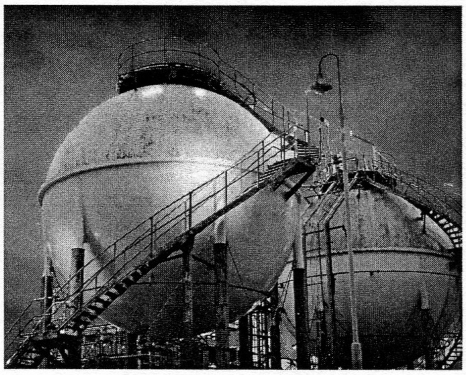



Foto: mmmx / fotolia

1.3.3.1 Berechnen Sie den Wendepunkt $W$ der Funktion $V$ mit Hilfe der Differentialrechnung.

1.3.3.2 Interpretieren Sie die Lage von $W$ und den Verlauf des Graphen von $V$ bezüglich $W$ unter Bezugnahme auf die Form des Kugeltanks.

# L ö s u n g e n

## 1.1 Funktion *f*

Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{4x^2-1}{x-1}$ .

### 1.1.1 Definitionsmenge und Nullstellen **4,0 Punkte**

- Maximale Definitionsmenge: $D_{\max} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ (1 ist Nullstelle des Nennerpolynoms)
- Nullstellen: $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$
- Veränderte Darstellung des Funktionsterms:

$$4\cdot x + 4 + \frac{3}{x-1} = \frac{(4x+4)(x-1)+3}{x-1} = \frac{4x^2-4+3}{x-1} = \frac{4x^2-1}{x-1} = f(x)$$

<u>Alternative</u>*:* Polynomdivision

$$(4x^2 - 1) : (x - 1) = 4\cdot x + 4 + \frac{3}{x-1}$$

### 1.1.2 Inhalt der Fläche mit der *x*-Achse **4,5 Punkte**

Aus 1.1.1 ergeben sich die Integrationsgrenzen – 0,5 und + 0,5.

$$\mu(A) = \int_{-0,5}^{+0,5} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-0,5}^{+0,5} \left(4\cdot x + 4 + \frac{3}{x-1}\right) dx$$ (Term nach Polynomdivision zur Bestimmung der Stammfunktion verwenden!)

$$= \left[2\cdot x^2 + 4\cdot x + 3\cdot \ln|x-1|\right]_{-0,5}^{+0,5}$$

$$= (0,5+2+3\ln(0,5)) - (0,5-2+3\ln(1,5)) \approx 0,704$$

Der Flächeninhalt beträgt etwa 0,7 FE.

### 1.1.3.1 Funktionsgleichung des verschobenen Graphen **2,0 Punkte**

Einer Verschiebung um 1 in negative *x*-Richtung entspricht der Übergang $x \to x + 1$ im Funktionsterm.

$$g(x) = \underbrace{f(x+1)}_{\substack{\text{Verschiebung}\\ \text{in } x\text{-Richtung}}} \underbrace{-\;8}_{\substack{\text{Verschiebung}\\ \text{in } y\text{-Richtung}}}$$

$$= \left(4\cdot(x+1) + 4 + \frac{3}{(x+1)-1}\right) - 8$$

$$= 4x + 4 + 4 + \frac{3}{x} - 8$$

$$= 4x + \frac{3}{x}$$

### 1.1.3.2 Symmetrie des verschobenen Graphen **2,5 Punkte**

- Die Definitionsmenge $D_{\max} = \mathbb{R}^*$ ist symmetrisch zum Ursprung O.
- Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^*$: $g(-x) = 4(-x) + \frac{3}{(-x)} = -(4x + \frac{3}{x}) = -g(x)$ .

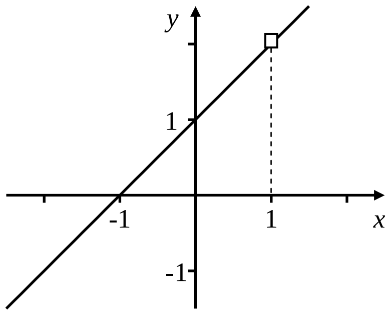
Somit ist der verschobene Graph symmetrisch zum Ursprung.

## 1.2 Funktionenschar $f_a$

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $f_a(x) = \frac{a \cdot x^2 - 1}{x-1}$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$ .

### 1.2.1 Definitionsmenge, Art der Definitionslücke und Graph **4,5 Punkte**

- *Maximale Definitionsmenge* (0,5 P)
  Es gilt: $D_{\max} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ (hängt nicht von $a$ ab.)
- *Charakterisierung der Definitionslücke 1* (3,0 P)
  Es ist zu prüfen, ob es sich um eine Polstelle oder eine behebbare Lücke handelt.
  Dazu ist zu untersuchen, für welchen Wert von $a$ die Stelle 1 auch Nullstelle des Zählerpolynoms ist:
  $$a \cdot 1^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 1 \,.$$
  Dies bedeutet:
  – Für $a = 1$ ergibt sich $f_1(x) = x + 1$ (mit 1 als stetig behebbarer Lücke).
  – Für $a \neq 1$ ist 1 eine Polstelle (mit Vorzeichenwechsel).
- *Graph von $f_1$* (1,0 P)




### 1.2.2 Asymptote und genau ein gemeinsamer Punkt aller Asymptoten **4,5 Punkte**

- *Asymptote* (2,5 P)
  Eine Polynomdivision ergibt:

$$\begin{array}{l}
(a\,x^2 \qquad - 1) \;:\; (x-1) = \; a\,x + a + \dfrac{a-1}{x-1} \\
\underline{-\,(a\,x^2 - a\,x)} \\
\qquad a\,x - 1 \\
\qquad \underline{-\,(a\,x - a)} \\
\qquad\qquad a - 1
\end{array}$$

  Gleichung der Asymptote: $y = a \cdot x + a$

- *Genau ein gemeinsamer Punkt aller Asymptoten* (2,0 P)
  Ansatz: Asymptoten $y = a \cdot x + a$ und $y = b \cdot x + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und $a \neq b$.
  Schnittbedingung:
  $$\begin{aligned} a \cdot x + a = b \cdot x + b \;&\Leftrightarrow\; a \cdot x - b \cdot x = -a + b \\ &\Leftrightarrow\; (a-b) \cdot x = -(a-b) \quad \big|\; : (a-b) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow\; x = -1 \qquad \text{(unabh. von } a,b) \end{aligned}$$
  Alle Geraden schneiden sich an der Stelle –1 im Punkt $S(-1 \mid 0)$.

### 1.2.3 Erste Ableitung **3,0 Punkte**

$$f_a'(x) = \frac{(x-1)\cdot 2ax - (ax^2-1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2ax^2 - 2ax - ax^2 + 1}{(x-1)^2} = \frac{ax^2 - 2ax + 1}{(x-1)^2}$$

<u>Alternative</u>: Ableitung des Funktionsterms $f_a(x) = a\,x + a + \frac{a-1}{x-1}$ aus dem Aufgabenteil 1.2.2 und Umformung in die angegebene Darstellung.

### 1.2.4 Stellen mit waagerechter Tangente **4,5 Punkte**

Bedingung: $f_a'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; ax^2 - 2ax + 1 = 0$ (mit $a \geq 0$)

Für $a = 0$ ergibt sich die unerfüllbare Aussage $1 = 0$. In diesem Fall gibt es keine waagerechte Tangente.

Im Folgenden sei $a > 0$ vorausgesetzt.

$$\begin{aligned} f_a'(x) = 0 \;&\Leftrightarrow\; ax^2 - 2ax + 1 = 0 \quad | : \; a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow\; x^2 - 2x + \frac{1}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow\; x^2 - 2x + 1 = 1 - \frac{1}{a} \\ &\Leftrightarrow\; (x-1)^2 = 1 - \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Es gibt nur Lösungen für: $1 - \frac{1}{a} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 1 \geq \frac{1}{a} \;\Leftrightarrow\; a \geq 1 \quad (a \in \mathbb{R}_0^+)$

Für $a = 1$ ergibt sich allerdings als Lösung $x = 1 \notin D_{\max}$.

Insgesamt folgt, dass es nur für $a > 1$ waagerechte Tangenten gibt.

### 1.2.5 Zuordnung **4,0 Punkte**

Als passende Zuordnung der angegebenen Graphen zu den Parameterwerten $a = 0{,}5$ und $a = 1{,}5$ ergibt sich:

- Graph 1 : $a = 1{,}5$
  schiefe Asymptote mit positiver Steigung sowie zwei Stellen mit waagerechter Tangente.
  Somit: $a > 0$ und $a > 1$ ; es verbleibt nur $a = 1{,}5$.
- Graph 2 : $a = 0{,}5$
  schiefe Asymptote mit positiver Steigung, aber keine Stelle mit waagerechter Tangente.
  Somit: $0 < a < 1$ ; es verbleibt nur $a = 0{,}5$.
- Graph 3 : kein Wert von $a$
  schiefe Asymptote mit negativer Steigung.
  Dieser Graph scheidet somit aus.

Mögliche Änderungen beim Übergang von $a < 1$ zu $a > 1$:

- Annäherungsverhalten an die schiefe Asymptote

  Für $x \to -\infty$ Wechsel der Annäherung von „von oben" zu „von unten".

  Für $x \to +\infty$ Wechsel der Annäherung von „von unten" zu „von oben".
- Vorzeichenwechsel an der Polstelle 1

  Der Vorzeichenwechsel ändert von „von + nach –„ zu „von – nach +".
- Anzahl der waagerechten Tangenten bzw. der lokalen Extrema.

  Die Anzahl wechselt von 0 zu 2.
- Krümmungsverhalten

  Die Krümmungsart in den Krümmungsintervallen $]-\infty\,;\,1[$ und $]1\,;\,+\infty\,[$ wechselt von Linkskrümmung zu Rechtskrümmung bzw. von Rechtskrümmung zu Linkskrümmung.

## 1.3 Kreis und Kugelkappe / Kugeltank

Gegeben ist die Funktion $g : [0\,;\,6] \to \mathbb{R}\,;\;\; x \mapsto \sqrt{9-(x-3)^2}$ .

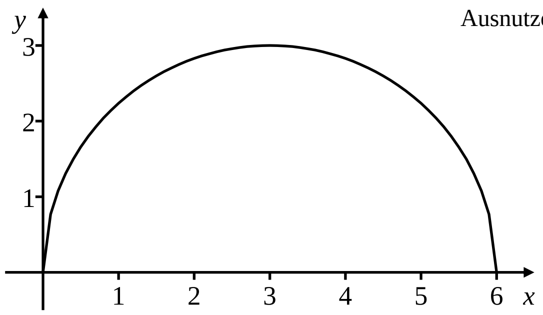
### 1.3.1 Halbkreis **4,0 Punkte**

- *Wertetabelle*: (Werte teilweise gerundet) (1,0 P)

| $x$ | 0,0 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 4,5 | 5,0 | 5,5 | 6,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0,0 | 1,7 | 2,2 | 2,6 | 2,8 | 3,0 | 2,8 | 2,6 | 2,2 | 1,7 | 0,0 |

Ausnutzen der Achsensymmetrie zu $x = 3$

- *Graph* (1,0 P)



Der Graph ist ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt $M(3 \mid 0)$ und und dem Radius 3.

- *Abstand eines Punktes $P(x \mid g(x))$ von $M(3 \mid 0)$* (2,0 P)

$$d(P\,;\,M) = \sqrt{(3-x)^2+(0-g(x))^2} = \sqrt{(3-x)^2+9-(x-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

### 1.3.2 Rotationskörper um die *x*-Achse

#### 1.3.2.1 Volumen für *h* = 6 **1,0 Punkte**

Für $h = 6$ ergibt sich als Rotationskörper eine Kugel mit dem Durchmesser 6 bzw. dem Radius 3.

Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \approx 113{,}10$ (VE)

#### 1.3.2.2 Form für 0 < *h* < 6 **1,0 Punkte**

Der Rotationskörper ist eine Kugelkappe für $0 < h < 6$.

#### 1.3.2.3 Volumen für allgemeinen Wert von *h* **4,5 Punkte**

$$V(h) = \pi \cdot \int_0^h (g(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^h (9-(x-3)^2)\,dx = \pi \cdot \int_0^h (9-(x^2-6x+9))\,dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^h (6x-x^2)\,dx = \pi \cdot \left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \pi \cdot \left[3h^2-\frac{1}{3}h^3\right] = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot (9-h)$$

### 1.3.3 Wendepunkt der Funktion V

#### 1.3.3.1 Wendepunktsberechnung **4,0 Punkte**

- Volumenfunktion: $V(x) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot (9-x) = \pi \cdot (3x^2 - \frac{1}{3}x^3)$
- Ableitungen: $V'(x) = \pi \cdot (6x - x^2)$

  $V''(x) = \pi \cdot (6 - 2x)$

  $V'''(x) = \pi \cdot (-2) = -2\pi$
- Notwendige Bedingung: $V''(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$
- Hinreichende Bedingung: $V'''(3) = -2\pi \neq 0$

Daher liegt der Wendepunkt $W(3 \mid 18\pi)$ vor.

### 1.3.2.2 Interpretation der Lage des Wendepunkts **2,0 Punkte**

Am Wendpunkt $W$ ist der Kugeltank beim halben Durchmesser als Füllhöhe halb voll (vergleiche mit dem Ergebnis von 1.3.3.1).

Die Querschnittsfläche und damit der momentane Volumenanstieg haben am Wendepunkt $W$ ihr Maximum erreicht.

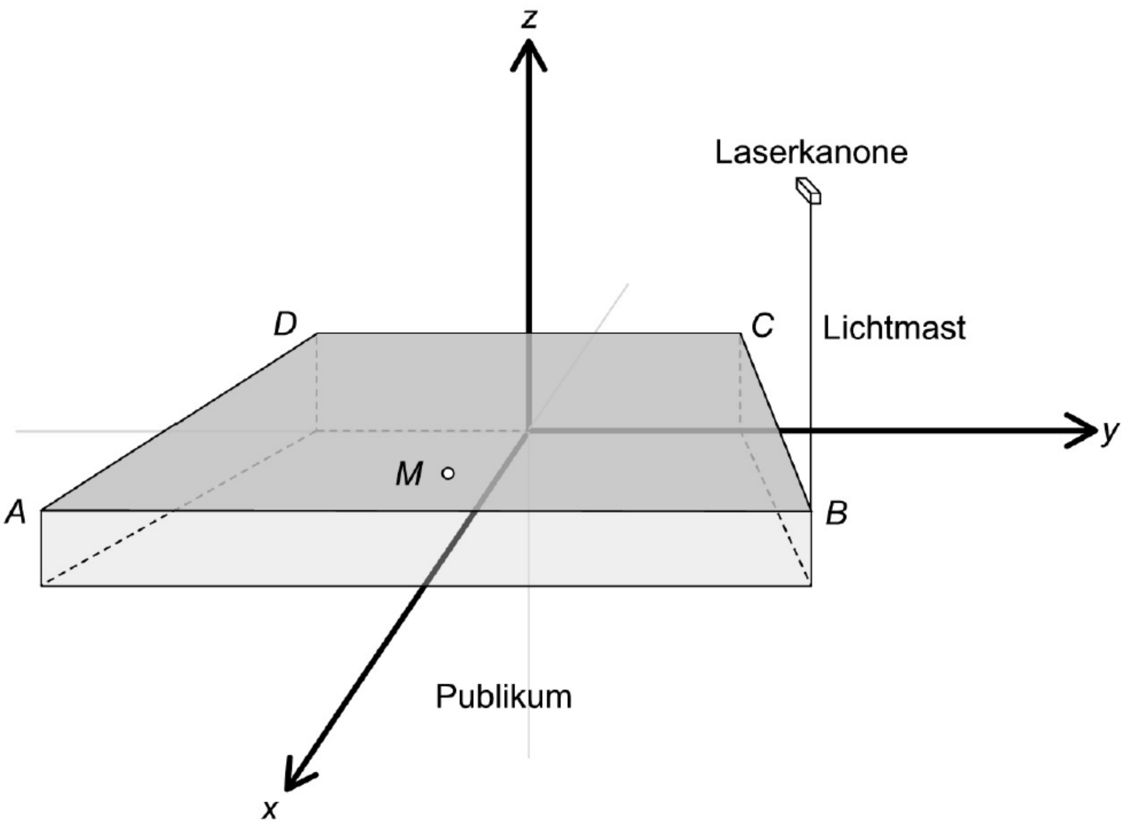
Der Graph ist symmetrisch zum Wendepunkt $W$.

Die Symmetrie des Graphen erklärt sich geometrisch daraus, dass die horizontalen kreisförmigen Querschnittsflächen des Kugeltanks von der Mittelebene aus gesehen sich nach oben und unten in demselben geometrischen Rahmen ändern.

# Aufgabe 2
# ANALYTISCHE GEOMETRIE

Bei einem Musikfestival wird eine Bühne aufgebaut, deren Bühnenfläche *ABCD* die Form eines gleichschenkligen Trapezes besitzt. Das Publikum und die gesamte Bühne stehen auf der *x*-*y*-Ebene. Dabei ist $A(10 \mid -9 \mid 1{,}5)$, $B(10 \mid 9 \mid 1{,}5)$ und $D(0 \mid -5 \mid 2)$ (1 LE $\hat{=}$ 1 m).

Die Bühnenebene ist also geneigt.




**2.1** Geben Sie die Koordinaten des Eckpunktes *C* sowie die Länge der vorderen Seite $\overline{AB}$ und die Länge der hinteren Seite $\overline{CD}$ der Bühnenfläche *ABCD* an.
Um wie viele Zentimeter liegt der hintere Bühnenrand $\overline{CD}$ höher als der vordere?

**2.2** Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Bühnenfläche liegt.
[Zur Kontrolle: $e_B$: $x + 20z - 40 = 0$]

**2.3** Berechnen Sie den Flächeninhalt der Bühnenfläche.

**2.4** Am Mittelpunkt *E* der Strecke $\overline{AD}$ befindet sich eine elektrische Anschlussdose. Ermitteln Sie, wie weit ein dort angeschlossenes 10 m langes Kabel an den Punkt *C* heranreicht.

**2.5** Ein Bühnentechniker soll für eine Choreographie denjenigen Punkt *M* auf der Bühnenfläche *ABCD* markieren, der von allen vier Eckpunkten den gleichen Abstand hat.
Beschreiben Sie eine Vorgehensweise, wie man mit Hilfe der Vektorrechnung die Koordinaten von *M* bestimmen kann. Die Berechnung selbst ist nicht erforderlich.

**2.6** Am Ende eines Mastes ist im Punkt $B'(10 \mid 9 \mid 8)$ eine Laserkanone befestigt. Sie erzeugt einen ebenen Lichtteppich, der Teil der Ebene mit der Gleichung

$$e_L: \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 114 = 0 \quad \text{ist.}$$

2.6.1 Prüfen Sie, ob der Lichtteppich die Stelle $E(5 \mid -7 \mid 1{,}75)$ erfassen kann.

2.6.2 Der Lichtteppich markiert in der $x$-$y$-Ebene, auf der das Publikum steht, eine gerade Linie. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden $g$, die diese Linie enthält.

[Zur Kontrolle: Eine der möglichen Geradengleichungen von $g$ ist

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 57 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \vec{0}\ .]$$

2.6.3 Bestimmen Sie das maximal mögliche Maß des Winkels, unter dem ein Laserstrahl des Lichtteppichs auf die $x$-$y$-Ebene treffen kann.

2.6.4 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P$, in dem das Laserlicht aus dem Lichtteppich senkrecht auf die in Aufgabenteil 2.6.2 beschriebene Gerade $g$ trifft.

# L ö s u n g e n

Gegeben sind die Punkte $A(10 \mid -9 \mid 1{,}5)$, $B(10 \mid 9 \mid 1{,}5)$ und $D(0 \mid -5 \mid 2)$ .

## 2.1 Punkt und Längen **2,5 Punkte**

Aus den gegebenen Eckpunkten und der Tatsache, dass es sich um ein gleichschenkliges Trapez handelt, folgt $C(0 \mid 5 \mid 2)$ ($x_2$-Koordinate gegenüber $D$ geändert).

- Länge der vorderen Seite: 18m ( $|\overrightarrow{AB}| = 18$)
- Länge der hinteren Seite: 10m ( $|\overrightarrow{CD}| = 18$)
- Erhöhung der hinteren Seite gegenüber der vorderen Seite: 50 cm

## 2.2 Ebenengleichung **3,0 Punkte**

- Normalenvektor: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 180 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$
- Punktnormalengleichung: $e_B$: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \right] = 0$
- Allgemeine Normalengleichung: $e_B$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 40 = 0$
- Koordinatengleichung: $e_B$: $x + 20z - 40 = 0$

## 2.3 Inhalt $A_B$ der trapezförmigen Tribüne **4,0 Punkte**

*1. Möglichkeit*: Verwendung der Trapezformel

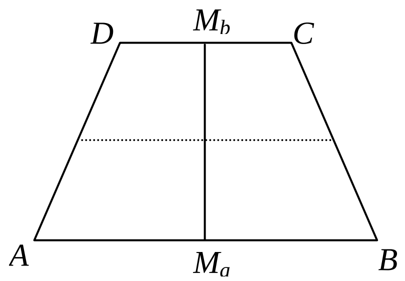
Zur Berechnung der Trapezfläche macht man gemäß der Trapezformel den Ansatz:

$$A_B = \text{Mittelparallele} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{2} \cdot (|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|) \cdot h_b$$

Die Höhe $h_b$ kann im Fall eines gleichschenkligen Trapezes berechnet werden als Abstand der Mittelpunkte $M_a$ von $\overline{AB}$ und $M_c$ von $\overline{CD}$.

$$\vec{m}_a = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \quad ;$$

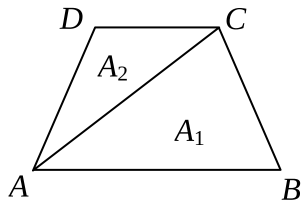
$$\vec{m}_c = \frac{1}{2} \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$




Für die Höhe folgt: $h_b = |\overrightarrow{M_a M_c}| = |\vec{m}_c - \vec{m}_a| = \left| \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{100{,}25} \approx 10{,}01$ (m)

Somit gilt: $\mu(A) = \frac{1}{2} \cdot (18 + 10) \cdot 10{,}01 \approx 140{,}17$ ($m^2$)

*2. Möglichkeit*: Zerlegung des Trapezes in zwei Teildreiecke und Berechnung der Flächeninhalte mithilfe des Vektorprodukts




$$\mu(A_1) = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right| = 9 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = 9 \cdot \sqrt{100,25} \approx 90,11$$

$$\mu(A_2) = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \\ 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10025} \approx 50,06$$

Insgesamt folgt: $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = 140,17 \ (\mathrm{m}^2)$

## 2.4 Kabellänge **2,5 Punkte**

$E$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$: $\vec{e} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{d}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1,75 \end{pmatrix}$

Der Abstand der Punkte $E$ und $C$ mit $C(0 \mid 5 \mid 2)$ beträgt:

$$d(E\,;C) = |\overrightarrow{EC}| = |\vec{c} - \vec{e}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1,75 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0,25 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{169,0625} \approx 13 \text{ (m)}.$$

Das Kabel reicht von $E$ aus bis auf etwa 3 m an den Punkt $C$ heran.

## 2.5 Punkt mit gleichem Abstand von allen Eckpunkten **2,5 Punkte**

$M$ ist der Umkreismittelpunkt der Bühnenfläche. Dieser ist zugleich Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten. *(Die Existenz von M braucht nicht begründet zu werden).*

- Es genügt, den Schnittpunkt zweier geeigneter Mittelsenkrechten zu bestimmen. Aus der Symmetrie des Trapezes ergeben sich zwei der vier Mittelsenkrechten als die Gerade $h$ durch die Mittelpunkte $M_a$ und $M_c$ der Strecken $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$.
- Nun konstruiert man als Hilfsebene $e_H$ die Mittelebene der Strecke $\overline{AD}$ mit $E$ als Aufpunkt und dem Vektor $\overrightarrow{AD}$ als Normalenvektor.
- Der Schnittpunkt von $e_H$ und $h$ ist der Umkreismittelpunkt $M$.

<u>Alternative</u>: (ein mögliches Beispiel)

- $M$ ergibt sich als Schnittpunkt der Schnittgerade $m$ der beiden Mittelebenen zu den Strecken $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ mit der Bühnenebene $e_B$.

## 2.6 Laserlicht

Gegeben ist die Ebene mit der Gleichung $e_L : \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 114 = 0$

### 2.6.1 Stelle E im Laserlicht **1,0 Punkte**

Punktprobe für den Punkte $E$ in $e_L$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1{,}75 \end{pmatrix} - 114 = -23{,}25 - 114 \neq 0$

Die Stelle $E$ kann von keinem Laserstrahl erfasst werden.

### 2.6.2 Gerade Linie des Lichtteppichs in der *x*-*y*-Ebene **4,0 Punkte**

Koordinatengleichung von $e_L : \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 114 = 0 \Leftrightarrow 2x + 6y + 5z - 114 = 0$

Die gesuchte Gerade $g$ ergibt sich als Schnittmenge der Ebene $e_L$ und der $x$-$y$-Ebene mit der Gleichung $z = 0$.

Mit $z = 0$ ergibt sich: $2x + 6y - 114 = 0 \Leftrightarrow x = -3y + 57 = 0$

Wählt man $y = \lambda$, so ergibt sich: $x = -3\lambda + 57 = 0$

Damit folgt: $g$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda + 57 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(*Als Kontrolle ist parameterfrei eine Geradengleichung in Plücker-Form angegeben, aus der man einen Geradenpunkt und einen Richtungsvektor entnehmen kann.*)

### 2.6.3 Winkel zwischen $e_L$ und der *x*-*y*-Ebene **2,0 Punkte**

Gegeben sind:

$$\vec{n}_L = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ mit } \left|\vec{n}_L\right| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{65}$$

$$\vec{n}_{xy} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ mit } \left|\vec{n}_{xy}\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

Damit folgt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_L \cdot \vec{n}_{xy}}{\left|\vec{n}_L\right| \cdot \left|\vec{n}_{xy}\right|} = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{1}} = \frac{5}{\sqrt{65} \cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{65}} \approx 0{,}6202 \quad , \text{ also } \alpha \approx 51{,}7°$$

### 2.6.4 Punkt, in dem das Laserlicht die Gerade senkrecht schneidet **3,5 Punkte**

Der gesuchte Punkt $P$ hat von der Geraden $g$ die minimale Entfernung. Es handelt sich um den Lotfußpunkt von $B'$ auf $g$.

Hilfsebene: Ebene $e_{B'}$ durch $B'(10 \mid 9 \mid 8)$ mit dem Richtungsvektor von $g$ als Normalenvektor

$$e_{B'}: \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 21 = 0$$

Der gesuchte Punkt $P$ ergibt sich als Schnitt der Geraden $g$ mit der Ebene $e_{B'}$:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 57 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + 21 = 0 \Leftrightarrow -171 + 10\lambda + 21 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 15$$

Einsetzen: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 57 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gesuchter Punkt: $P(12 \mid 15 \mid 0)$

# Aufgabe 3
# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

**3.1** Die Gemeinde mit den Orten Aheim, Bedorf und Celingen plant, zur Belebung des touristischen Angebotes der Region ein Thermalbad zu errichten. Um ein Meinungsbild der Bürgerinnen und Bürger einzuholen, wird eine Umfrage unter den 4400 Wahlberechtigten der Gemeinde durchgeführt.

Von den Befragten wohnen 2533 in Bedorf und 1052 in Celingen. 2877 aller Befragten haben keine Einwände gegen das Vorhaben der Gemeinde, allerdings befinden sich darunter nur 92 Personen aus Aheim, jedoch 901 aus Celingen.

3.1.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einer Tabelle („Sechsfeldertafel") dar.

3.1.2 Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Gegner des Thermalbades unter den Befragten aus Aheim bzw. Bedorf bzw. Gelingen.

3.1.3 Aus allen Befragten wird zufällig eine Person ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür,

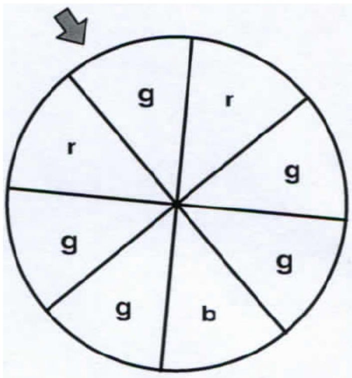
3.1.3.1 ... dass diese Person in Bedorf ansässig ist. ($P_1$)

3.1.3.2 ... dass die ausgewählte Person in Bedorf wohnt und sich gegen das Thermalbad ausgesprochen hat. ($P_2$)

3.1.3.3 ... dass die ausgewählte Person in Bedorf wohnt, wenn bekannt ist, dass sie sich gegen das Thermalbad geäußert hat. ($P_3$)

3.1.4 Die Umfrage wird nach zwei Monaten wiederholt. Begründen Sie, dass sich auch bei dieser Umfrage $P_2 \leq P_3$ ergibt.

**3.2** Die Gegner des Thermalbades gründen die Bürgerinitiative „Wir baden's aus" (WBA). Im Rahmen der jährlichen Kirmes in der Gemeinde will die Bürgerinitiative mit einem Glücksrad ihre finanziellen Möglichkeiten verbessern.
Aufgebaut wird ein Glücksrad mit acht gleich großen Sektoren (siehe Abbildung) in den Farben rot (r), grün (g) und blau (b).




3.2.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt das Glücksrad nach einem Drehen auf „grün" zum Stillstand?

3.2.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält ein Kirmesbesucher bei zehnmaligem Drehen des Glücksrades genau dreimal „rot"?

3.2.3 Ein Kirmesbesucher dreht das Glücksrad zehnmal und erhält dabei genau dreimal „rot". Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese drei Ergebnisse „rot" unmittelbar nacheinander erzielt worden sind.

3.2.4 Der Bürgermeister will mit der Bürgerinitiative in ein zwangloses Gespräch kommen. Er dreht das Glücksrad zwanzigmal, erhält jedoch kein einziges Mal „blau". Muss er sich Gedanken machen, ob das Glücksrad vorher manipuliert wurde?

**3.3** Die Bürgerinitiative WBA führt am Marktplatz eine Unterschriftenaktion durch.
Berechnen Sie, wie hoch der Anteil der Gegner des Thermalbades mindestens sein muss, damit sich unter fünfzehn zufällig angesprochenen Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 Prozent wenigstens ein Gegner des Thermalbades befindet.

# L ö s u n g e n

## 3.1 Befragung als zweistufiges Zufallsexperiment

### 3.1.1 Sechsfeldertafel

**3,0 Punkte**

A: in Aheim wohnhaft
B: in Bedorf wohnhaft
C: in Celingen wohnhaft
G: gegen den Bau des Thermalbades

| | A | B | C | Σ |
|---|---|---|---|---|
| G | 723 | 649 | 151 | 1523 |
| $\overline{G}$ | 92 | 1884 | 901 | 2877 |
| Σ | 815 | 2533 | 1052 | 4400 |

### 3.1.2 Prozentuale Anteile der Gegner

**3,0 Punkte**

Aheim : $\frac{|G \cap A|}{|A|} = \frac{723}{815} \approx 88{,}7\ \%$

Bedorf : $\frac{|G \cap B|}{|B|} = \frac{649}{2533} \approx 25{,}6\ \%$

Celingen: $\frac{|G \cap C|}{|C|} = \frac{151}{1052} \approx 14{,}4\ \%$

### 3.1.3 Betrachtung einer zufällig ausgewählten Person

3.1.3.1 $P_1 = P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2533}{4400} \approx 57{,}6\ \%$ **1,5 Punkte**

3.1.3.2 $P_2 = P(B \cap G) = \frac{|B \cap G|}{|\Omega|} = \frac{649}{4400} \approx 14{,}75\ \%$ **1,5 Punkte**

3.1.3.3 $P_3 = P(B \mid G) = \frac{|B \cap G|}{|G|} = \frac{649}{1523} \approx 42{,}6\ \%$ **2,0 Punkte**

### 3.1.4 Wiederholung der Umfrage

**1,5 Punkte**

$P_2$ und $P_3$ sind Brüche mit demselben Zähler $|B \cap G|$.
Der Nenner $|\Omega|$ von $P_2$ entspricht der Anzahl aller befragten Personen, der Nenner $|G|$ von $P_3$ aller Gegner; somit ist bei gleichem Zähler der Nenner von $P_2$ größer gleich dem Nenner von $P_3$.
Damit ist nachgewiesen, dass $P_2 \le P_3$ gilt.

## 3.2 Glücksrad

### 3.2.1 Wahrscheinlichkeit für „grün“

**1,0 Punkte**

Laplace-Modellierung: $P(\text{„grün“}) = \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\%$

### 3.2.2 Wahrscheinlichkeit für dreimal „rot“

**1,5 Punkte**

Bernoullikette der Länge $n = 10$ mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}25$

$$P(T = 3) = B(10\,;0{,}25\,;3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^7 \approx 25{,}0\%$$

### 3.2.3 Dreimal „rot" unmittelbar hintereinander **3,5 Punkte**

Zufallsexperiment: Auswahl von 3 Plätzen aus 10 möglichen Plätzen

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = 120$$

Ereignis: Platzierung von drei „rot" hintereinander

In einer Reihe von 10 Versuchen gibt es 8 Möglichkeiten, die zu drei „rot" hintereinander platzieren.

$|A| = 8$

Laplace-Wahrscheinlichkeit: $P(A) = \frac{8}{120} \approx 0{,}067 = 6{,}7\%$

### 3.2.4 Kein einziges Mal „blau" **2,0 Punkte**

Bernoulli-Kette der Länge $n = 20$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 1/8$

$$P(T = 0) = B(20\,;\, \tfrac{1}{8}\,;\, 0) = \binom{20}{3} \cdot (\tfrac{1}{8})^0 \cdot (\tfrac{7}{8})^{20} \approx 0{,}069 = 6{,}9\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei allen 20 Drehungen des Glücksrades kein „blau" zu erhalen, ist recht gering. Der Bürgermeister darf berechtigte Zweifel an der Seriosität des Ablaufs bei seinem Drehen des Glücksrades haben.

### 3.3 Bernoulli-Kette mit gesuchtem *p* **4,5 Punkte**

Bernoulli-Kette der Länge $n = 15$

Ansatz über das Gegenereignis $P(T \geq 1) = 1 - P(T = 0)$ :

$$\begin{aligned}
& 1 - P(T = 0) \geq 0{,}98 \\
\Leftrightarrow\quad & 1 - 0{,}98 \geq P(T = 0) \\
\Leftrightarrow\quad & 0{,}02 \geq \binom{15}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{15} \\
\Leftrightarrow\quad & 0{,}02 \geq (1-p)^{15} \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt[15]{0{,}02} \geq 1 - p \\
\Leftrightarrow\quad & p \geq 1 - \sqrt[15]{0{,}02} \approx 0{,}23 = 23\%
\end{aligned}$$

Der Anteil der Thermalbadgegner unter den Passanten muss mindestens 23% betragen.

# Schriftliche Abiturprüfung 2013

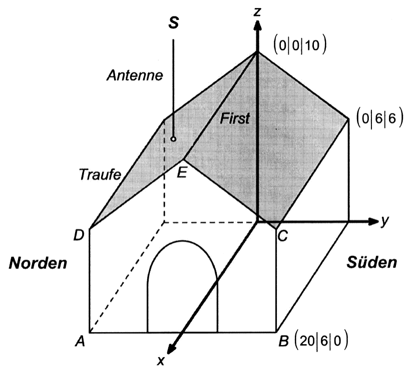
## E-Kurs

## Nachtermin

**Themenübersicht**

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung der ln- Funktion $f(x) = 5 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$
  - Übergang zur Scharfunktion $f_a(x) = 5 \cdot \frac{\ln(x^2+a)}{x^2+a}$
  - Zuordnung von Graphen zu Funktionen der Schar
  - Modellierung: Konzentration eines Stoffes in Wasser mithilfe der Funktion $k(t) = 1500 \cdot (e^{-t} - e^{-1,3 \cdot t})$

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Winkel zwischen Vektoren
  - Winkel zwischen zwei Geraden
  - Lotfußpunkt bezüglich einer Geraden




- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Kombinatorik
  - Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel
  - Bernoulli-Kette

SOFTFRUTTI verlag
www.softfrutti.de

# Aufgabe 1
# ANALYSIS

**1.1** Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto 5 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$ .

1.1.1 Untersuchen Sie $f$ auf einfache Symmetrie.

1.1.2 Begründen Sie, dass ...

1.1.2.1 … die Funktion $f$ genau eine Nullstelle besitzt.

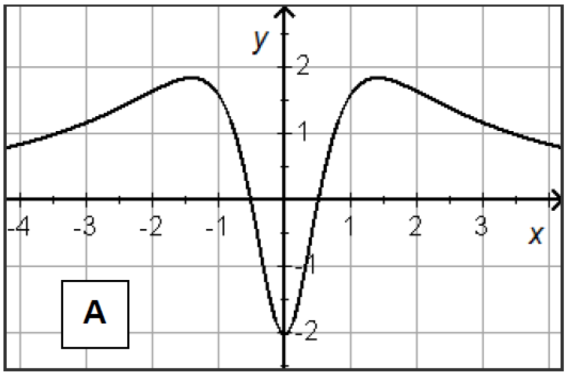
1.1.2.2 … die Funktion $f$ keine negativen Funktionswerte annimmt.

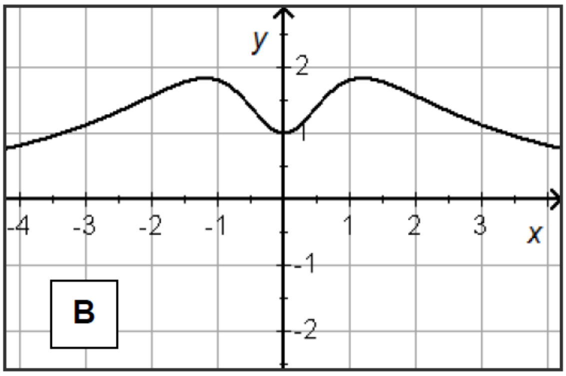
1.1.2.3 … sich der Zählerterm $\ln(x^2 + 1)$ für $x > 0$ in die Form $2 \cdot \ln(x) + \ln(1 + \frac{1}{x^2})$ bringen lässt.

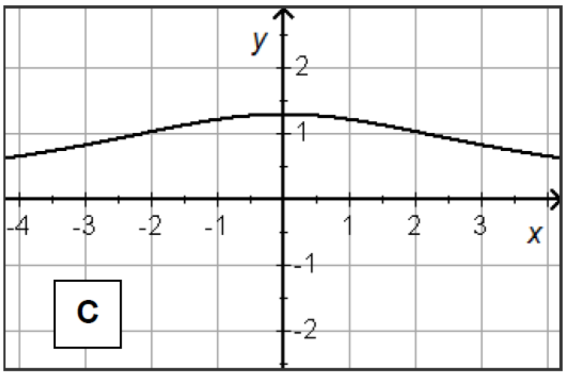
1.1.2.4 … der Funktionswert $f(x)$ für $x \to +\infty$ gegen den Wert 0 strebt.

1.1.3 Skizzieren Sie den Graphen von $f$ und Einbeziehung der Erkenntnisse aus den Aufgabenteilen 1.1.1 und 1.1.2.

**1.2** Gegeben ist die durch $f_a: D_{\max} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto 5 \cdot \frac{\ln(x^2+a)}{x^2+a}$ mit $a > 0$ beschriebene Funktionenschar, die mit $a = 1$ auch die Funktion $f$ aus Aufgabe 1.1 enthält.
Nachstehend sind drei typische Funktionsgraphen der Schar dargestellt.




1.2.1 Erläutern Sie anhand einer charakteristischen Eigenschaft, dass der Graph von $f_1$ den Übergang der Graphen von $f_a$ zwischen den Typen A und B darstellt.

1.2.2 Begründen Sie, dass alle Funktionen $f_a$ die gleiche maximale Definitionsmenge $\mathbb{R}$ haben.

1.2.3 Weisen Sie durch Ableiten nach, dass $f_a'(x) = 10 \cdot \frac{x \cdot (1 - \ln(x^2 + a))}{(x^2 + a)^2}$ gilt.

1.2.4 Berechnen Sie mit Hilfe des in 1.2.3 angegebenen Ableitungsterms in Abhängigkeit von $a$ alle Stellen, an denen der Graph von $f_a$ eine waagerechte Tangente besitzt.

1.2.5 Zeigen Sie, dass für $a \leq \mathrm{e}$ die Funktionswerte von $f_a$ an den Stellen $-\sqrt{\mathrm{e} - a}$ und $\sqrt{\mathrm{e} - a}$ unabhängig von $a$ sind.

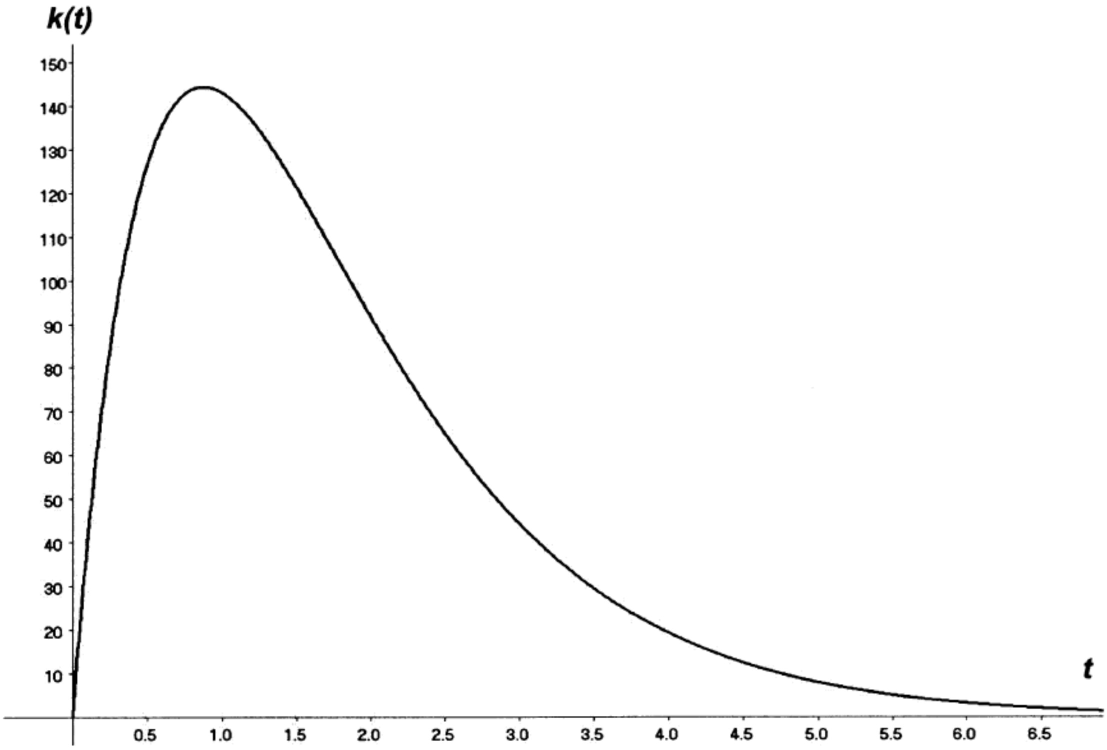
1.2.6 Es gibt genau zwei Geraden, auf denen alle lokalen Extrempunkte der Scharkurven von $f_a$ liegen. Erläutern Sie, inwieweit sich diese Tatsache in den Abbildungen A, B und C widerspiegelt, und geben Sie die Gleichungen der beiden Geraden an.

1.2.7 Begründen Sie, dass $H(0 \mid \frac{5}{\mathrm{e}})$ der einzige Hochpunkt der Funktion $f_{\mathrm{e}}$ ist.

**1.3** Dem Wasser eines Fischzuchtbeckens wird eine bestimmte Menge eines pulverförmigen Zusatzstoffes zur Verbesserung der Wasserqualität beigefügt. Der Zusatzstoff löst sich im Wasser und wird im Laufe der Zeit durch Mikroorganismen abgebaut.

Die Funktion $k: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\,;\; t \mapsto 1500 \cdot (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-1{,}3 \cdot t})$ beschreibt die Konzentration des Zusatzstoffes im Wasser in Abhängigkeit von der Zeit $t$.

Dabei ist $k(t)$ die Maßzahl der Konzentration in Gramm pro Kubikmeter, $t$ ist die Maßzahl der Zeit in Tagen.




1.3.1 Interpretieren Sie den abgebildeten Graphen von $k(t)$ in Hinblick auf die Entwicklung der Konzentration des Zusatzstoffs im Wasser.

1.3.2 Berechnen Sie die mittlere Konzentration des Zusatzstoffs im Wasser während der ersten vier Tage nach der Beigabe ins Fischzuchtbecken.

[zur Kontrolle: $k_{\text{mittel}} \approx 81{,}3$]

1.3.3 Lesen Sie am Graphen ab, in welchem Zeitraum die Konzentration $k(t)$ größer als die mittlere Konzentration in den ersten vier Tagen ist.

Lesen Sie am Graphen ab, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Zusatzstoffes im Wasser am stärksten abnimmt. Was zeichnet diesen Zeitpunkt mathematisch aus?

1.3.4 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich die größte Menge des Zusatzstoffs gelöst im Wasser befindet, und bestimmen Sie den Wert dieser Konzentration.
[zur Kontrolle: $k_{\text{max}} \approx 144{,}4$]

1.3.5 Berechnen Sie, auf wie viel Prozent des maximalen Wertes sich die Konzentration des Zusatzstoffs im Wasser vier Tage nach der Beigabe verringert hat?

# L ö s u n g e n

## 1.1 Eigenschaften einer gebrochenen Funktion mit ln-Term

Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $5 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$ .

### 1.1.1 Symmetrie des Graphen **2,5 Punkte**

- Die Definitionsmenge $D_{\max} = \mathbb{R}$ ist symmetrisch zum Ursprung O.
- Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = 5 \cdot \frac{\ln((-x)^2+1)}{(-x)^2+1} = 5 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = f(x)$ .

Somit ist der Graph symmetrisch zur $y$-Achse.

### 1.1.2.1 Nullstellen **1,5 Punkte**

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{(doppelt)}$$

### 1.1.2.2 Keine negative Funktionswerte **2,0 Punkte**

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$ und damit $x^2 + 1 \geq 1$.
Wegen der Monotonie der ln-Funktion folgt dann: $\ln(x^2 + 1) \geq \ln(1) = 0$ .
Da für den Nennerterm $x^2 + 1 > 0$ gilt, folgt insgesamt: $f(x) = 5 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} \geq 0$ .

### 1.1.2.3 Umformung des Zählerterms **3,0 Punkte**

$$\begin{aligned} 2 \cdot \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) &= \ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) && \text{(3. Logarithmengesetz)} \\ &= \ln\left( x^2 \cdot \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) && \text{(1. Logarithmengesetz)} \\ &= \ln(x^2 + 1) && \text{(Ausmultiplizieren)} \end{aligned}$$

### 1.1.2.4 Grenzwert **2,5 Punkte**

Argumentation über eine Zerlegung in ein Produkt

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(5 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\right) = 5 \cdot \lim_{x\to+\infty} \left( \underset{\downarrow \atop +\infty}{\ln(x^2 + 1)} \cdot \underset{\downarrow \atop 0^+}{\frac{1}{x^2+1}}\right) = 0^+$$

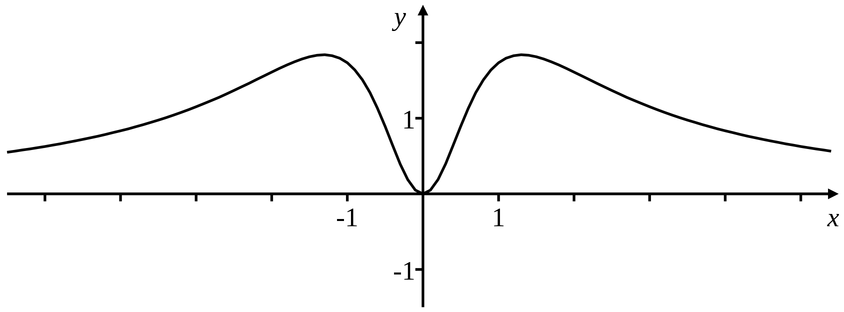
(Der rationale Term (zweiter Faktor) dominiert über den ln-Term (erster Faktor).)

Alternative: Argumentation über die Zerlegung gemäß 1.1.2.3

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5 \cdot \left( \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln(x)}{x^2+1}\right) + \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+1}\right) \right)$$

- Der erste Summand strebt gegen Null.
  Zähler und Nenner streben gegen $+\infty$, der ganzrationale Nennerterm dominiert aber den logarithmischen Zählerterm.
- Auch der zweite Summand strebt gegen Null.
  Der Zählerterm strebt gegen ln(1) = 0, der Nennerterm nimmt dabei beliebig große Werte an.

### 1.1.3 Graph der Funktion *f* **2,5 Punkte**




### 1.2 Funktionenschar $f_a$

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $5 \cdot \frac{\ln(x^2+a)}{x^2+a}$ mit a > 0 **.**

### 1.2.1 Übergang zwischen den Typen A und B **1,5 Punkte**

Es liegt ein Übergang von zwei Nullstellen bei Graphen vom Typ A über genau eine Nullstelle bei $f_1$ hin zu keiner Nullstelle bei Graphen vom Typ B vor.

Alternative: Der Tiefpunkt wechselt seine Lage von unterhalb zur $x$-Achse über die $x$-Achse nach oberhalb der $x$-Achse

### 1.2.2 Gleiche maximale Definitionsmenge **2,0 Punkte**

Für $a > 0$ ist die Gleichung $x^2 + a = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ unerfüllbar; der Nenner kann also den Wert 0 nicht annehmen.

Für $a > 0$ gilt $x^2 + a > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, der Term $\ln(x^2 + a)$ also stets definiert.

Insgesamt folgt für alle Funktionen $f_a$: $D_{\max} = \mathbb{R}$.

### 1.2.3 Erste Ableitung **5,0 Punkte**

$$f_a'(x) = 5 \cdot \frac{(x^2+a)\cdot\frac{2x}{x^2+a} - \ln(x^2+a)\cdot 2x}{(x^2+a)^2} = 5 \cdot \frac{2x - 2x\cdot\ln(x^2+a)}{(x^2+a)^2} = 5 \cdot \frac{2x\cdot(1-\ln(x^2+a))}{(x^2+a)^2}$$

### 1.2.4 Waagerechte Tangenten **4,5 Punkte**

$$\begin{aligned} f_a'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x\cdot(1 - \ln(x^2+a)) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ 1 - \ln(x^2+a) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ \ln(x^2+a) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x^2 + a = \mathrm{e} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x^2 = \mathrm{e} - a \end{aligned}$$

- Die Lösung $x = 0$ ergibt sich unabhängig vom Parameter $a$ aus dem ersten Faktor des Ableitungsterms.
- Für $a = \mathrm{e}$ liefert auch der zweite Term die Lösung $x = 0$.
- Für $\mathrm{e} - a > 0$ oder $a < \mathrm{e}$ ergeben sich zwei weitere Lösungen, nämlich $\pm\sqrt{\mathrm{e}-a}$ .

### 1.2.5 Funktionswerte an den Stellen $\pm\sqrt{\mathrm{e}-a}$ unabhängig von *a* **1,5 Punkte**

$$f(\pm\sqrt{\mathrm{e}-a}) = 5 \cdot \frac{\ln((\pm\sqrt{\mathrm{e}-a})^2+a)}{(\pm\sqrt{\mathrm{e}-a})^2+a} = 5 \cdot \frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = \frac{5}{\mathrm{e}} \approx 1{,}839 \ \text{(unabhängig von } a\text{)}$$

### 1.2.6 Geraden, auf denen alle Extrempunkte liegen **2,0 Punkte**

*Lage der möglichen Extrempunkte*:

- Stellen $x = \pm\sqrt{\mathrm{e} - a}$ : $f(\pm\sqrt{\mathrm{e} - a}) = \frac{5}{\mathrm{e}}$ (gemäß 1.2.5)

  Alle zugehörigen Punkte liegen auf der Gerade $y = \frac{5}{\mathrm{e}}$ (einer Parallelen zur $x$-Achse).

- Stelle $x = 0$ : $f(0) = 5 \cdot \frac{\ln(0+a)}{0+a} = 5 \cdot \frac{\ln(a)}{a}$

  Alle zugehörigen Punkte liegen auf der Gerade $x = 0$ (der $y$-Achse).

*Bezug zu den Abbildungen A, B und C*:

- Abbildung A: zwei Hochpunkte auf der Geraden $y = \frac{5}{\mathrm{e}}$ , Tiefpunkt mit $y = -2$
- Abbildung B: zwei Hochpunkte auf der Geraden $y = \frac{5}{\mathrm{e}}$ , Tiefpunkt mit $y = 1$
- Abbildung C: es gibt nur einen Hochpunkt auf der Geraden $y \approx 1{,}25$
  (der Graph gehört zu einem Parameterwert $a > \mathrm{e}$)

### 1.2.7 Einziger Hochpunkt von $f_\mathrm{e}$ **2,5 Punkte**

Für die erste Ableitung gilt: $f_\mathrm{e}'(x) = \frac{2x \cdot (1 - \ln(x^2 + \mathrm{e}))}{(x^2 + \mathrm{e})^2}$ (vgl. 1.2.3 mit $a = \mathrm{e}$)

- *Notwendige Bedingung*: Gemäß 1.2.4 ergibt sich: $f_\mathrm{e}'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 0$
  Es kann nur an der Stelle 0 ein Extremum geben.

- *Hinreichende Bedingung*:
  Vorzeichentabelle:

| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $f_\mathrm{e}'(x)$ | + | 0 | – |
| | | HP | |

$f_\mathrm{e}'(1) \approx -0{,}045 < 0$

$f_\mathrm{e}'(-1) \approx +0{,}045 > 0$

- *Funktionswert*: Gemäß 1.2.6 gilt für $a = \mathrm{e}$: $f(0) = 5 \cdot \frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = 5 \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{5}{\mathrm{e}}$

Insgesamt folgt, dass es nur den Hochpunkt $H(0 \mid \frac{5}{\mathrm{e}})$ gibt.

## 1.3 Lösen und Abbau eines Zusatzstoffes in einem Wasserbecken

Gegeben ist die Funktion $k : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ; $x \mapsto 1500 \cdot (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-1{,}3 \cdot t})$ .

### 1.3.1 Interpretation des Graphen **2,5 Punkte**

- Zunächst steigt durch den Lösungsprozess die Konzentration des Zusatzstoffs im Wasser steil an.
- Nach ca. 21 h erreicht sie ihren höchsten Wert von ca. 145 g/m$^3$.
- Anschließend nimmt die Konzentration in Folge des Abbaus durch die Mikroorganismen ab.
- Nach 6 Tagen ist der Zusatzstoff quasi vollständig abgebaut.

**1.3.2 Mittelwert in den ersten vier Tagen** **5,0 Punkte**

$$\overline{\mu} = \frac{1}{4} \int_0^4 f(t)\,dt = \frac{1}{4} \int_0^4 1500 \cdot (e^{-t} - e^{-1,3 \cdot t})\,dt$$

$$= 375 \cdot \left[-e^{-t} + \tfrac{1}{1,3} e^{-1,3 \cdot t}\right]_0^4 \approx 375 \cdot 0,2167 \approx 81$$

In den ersten vier Tagen nach der Zugabe zum Wasser beträgt die Konzentration des Zusatzstoffes im Mittel ca. 81 g/m$^3$.

**1.3.3 Konzentration $k(t)$ größer als die mittlere Konzentration** **2,5 Punkte**

Etwa zwischen 6 h und 54 h nach der Beigabe zum Wasser ist die Konzentration größer als der Mittelwert der ersten vier Tage.
(*Anmerkung*: Als richtig zu werten sind auch Zeitpunktangaben ± 6 h.)

Die stärkste Abnahme der Konzentration des Zusatzstoffs erfolgt etwa 42 h nach der Einbringung ins Wasser (an der Wendestelle).
(*Anmerkung*: Als richtig zu werten sind auch Zeitpunktangaben ± 6 h)

**1.3.4 Zeitpunkt, zu dem die größte Menge des Zusatzstoffs gelöst ist** **5,0 Punkte**

Ableitung: $k'(t) = 1500 \cdot (-e^{-t} + 1,3 \cdot e^{-1,3 \cdot t})$ .

$$\begin{aligned} k'(t) = 0 &\Leftrightarrow -e^{-t} + 1,3 \cdot e^{-1,3 \cdot t} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1,3 \cdot e^{-1,3 \cdot t} = e^{-t} \qquad | \ln \\ &\Leftrightarrow \ln(1,3) + (-1,3 \cdot t) = -t \\ &\Leftrightarrow \ln(1,3) = 0,3 \cdot t \\ &\Leftrightarrow t = \ln(1,3) / 0,3 \approx 0,875 \quad \text{(Tage)} \end{aligned}$$

Da dies eine einfache Nullstelle der ersten Ableitung ist (mit Vorzeichenwechsel), liegt eine Extremstelle vor. Vergleicht man mit dem Graphen, so ist $t$ die gesuchte Maximumsstelle.
Die maximale Konzentration $k(0,875) \approx 144,4$ g/m$^3$ ist nach 0,875 Tagen oder ca. 21 Stunden erreicht.

**1.3.5 Prozentsatz des maximalen Werts nach vier Tagen** **1,5 Punkte**

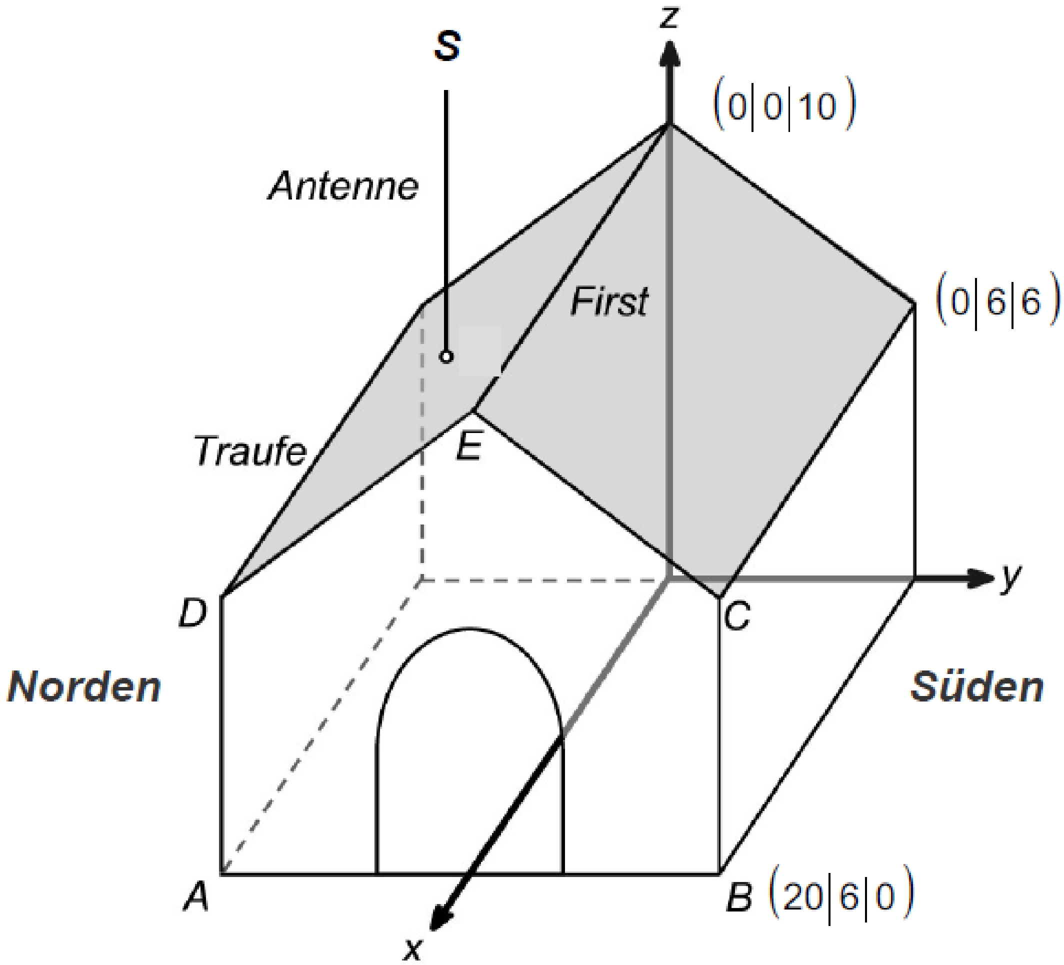
Es gilt: $k(4) \approx 19,2$ .

Dies sind $\frac{19,2}{144,4} \approx 0,133 = 13,3\%$ des Maximums.

# Aufgabe 2
# ANALYTISCHE GEOMETRIE

Die Abbildung zeigt die Scheune von Bauer Jansen. Deren rechteckige Grundfläche ist 20 m lang und 12 m breit. Der Dachfirst verläuft in einer Höhe von 10 m, die beiden Dachtraufen jeweils in einer Höhe von 6 m über der Grundfläche der Scheune. Das große Tor der Scheune zeigt nach Westen.

Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Grundfläche der Scheune in der *x*-*y*-Ebene liegt, die Koordinatenachsen parallel zu den Grundseiten verlaufen und der Ursprung mit dem Mittelpunkt der hinteren Grundseite übereinstimmt. (1 LE $\triangleq$ 1 m)




**2.1** Zunächst werden einige Gebäudeteile der Scheune betrachtet.

2.1.1 Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte *A*, *C*, *D* und *E* der vorderen Giebelfläche an und berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Giebelfläche *ABCED*.

2.1.2 Erstellen Sie eine Normalengleichung der nördlichen Dachebene $e_N$, in der die Punkte *D* und *E* liegen.

[ zur Kontrolle: $e_N: \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 30 = 0$ ]

2.1.3 Berechnen Sie das Maß $\varepsilon$ des Innenwinkels der Giebelfläche am Punkt *E*.

**2.2** Auf der Dachfläche, die nach Süden ausgerichtet ist, möchte Bauer Jansen eine Photovoltaikanlage installieren lassen. Die Solarmodule haben die Abmessungen von jeweils 1,60 m × 1,00 m. Die Solarmodule können nicht geteilt werden. Bei deren Verlegung auf der Dachfläche muss ein Abstand von mindestens 30 cm zum Dachflächenrand eingehalten werden.

2.2.1 Entscheiden Sie, ob die Solarmodule bei der Montage auf der Dachfläche entweder alle längs oder alle quer liegend angeordnet werden sollen, um so die Dachfläche möglichst weit zu belegen. Begründen Sie Ihre Antwort.

2.2.2 Am 23. Mai 2013 scheint die Sonne um die Mittagszeit genau aus südlicher Richtung unter einem Winkel von 61° auf den waagerechten Erdboden.

Bestimmen Sie den Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen zu diesem Zeitpunkt auf die Flächen der Solarmodule fallen.

**2.3** Um sein Einkommen weiter aufzubessern, schließt Bauer Jansen mit einem Mobilfunkbetreiber einen Vertrag ab, der die Errichtung eines Antennenmastes auf dem nördlichen Scheunendach zum Gegenstand hat. Die Spitze des Antennenmastes befindet sich nach der Montage im Punkt $S(11 \mid -3 \mid 14)$.

2.3.1 Bestimmen Sie die Länge des Maststücks, das über die Dachfläche hinausragt.

2.3.2 Prüfen Sie durch geeignete Rechnung, ob das Lot von $S$ aus auf die Gerade $DE$ seinen Lotfußpunkt $L$ auf der Strecke $\overline{DE}$ hat.

**2.4** Zum Schutz des Scheuneneingangs vor Regen befestigt Bauer Jansen in den Punkten $C$ und $E$ des vorderen Giebels sowie in einem Punkt $P$, der in der $x$-$y$-Ebene liegt, eine Plane in Form eines gleichschenkligen Dreiecks.

2.4.1 Beschreiben Sie die Lage aller Punkte des Anschauungsraumes, die von den Punkten $C$ und $E$ denselben Abstand haben.

2.4.2 Begründen Sie, dass alle Punkte der $x$-$y$-Ebene, die von den Punkten $C$ und $E$ denselben Abstand haben, die gleiche $y$-Koordinate besitzen.

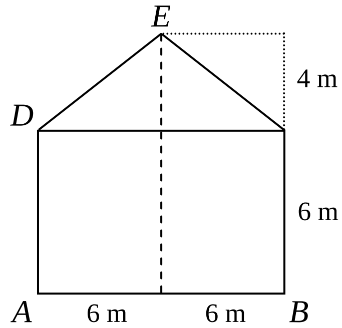
# L ö s u n g e n

## 2.1 Berechnung von Gebäudeteilen

### 2.1.2 Koordinaten und Flächeninhalt der Giebelfläche **4,5 Punkte**

Aus Text und Zeichnung: $A(20 \mid -6 \mid 0)$ ; $C(20 \mid 6 \mid 6)$ ; $D(20 \mid -6 \mid 6)$ und $E(20 \mid 0 \mid 10)$

Die Giebelfläche lässt in ein Rechteck und ein aufgesetztes Dreieck zerlegen.




- Flächeninhalt des Rechtecks
  Es gilt: $\mu(A_1) = 12 \cdot 6 = 72 \ (\mathrm{m}^2)$
- Flächeninhalt des Dreiecks (elementargeometrisch)
  Die beiden Teildreiecke lassen sich aus Symmetriegründen zu einem Rechteck zusammensetzen.
  Daher gilt: $\mu(A_2) = 6 \cdot 4 = 24 \ (\mathrm{m}^2)$

Die Giebelfläche hat also den Inhalt: $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = 96 \ (\mathrm{m}^2)$

<u>Alternative</u>: Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks mithilfe des Vektorprodukts

$$\mu(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DE} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= 12 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 12 \cdot 2 = 24$$

### 2.1.2 Normalengleichung der nördlichen Dachebene **2,0 Punkte**

- Richtungsvektoren: $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Punktnormalengleichung:

$$\mathrm{e}_N\colon\ \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{e}) = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right] = 0$$

- Allgemeine Normalengleichung: $\mathrm{e}_N\colon\ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 30 = 0$

### 2.1.3 Winkelberechnung **2,0 Punkte**

Der gesuchte Innenwinkel der Giebelfläche kann z. B. berechnet werden als Winkel zwischen den Vektoren

$$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{EC}| = \sqrt{0^2+6^2+(-4)^2} = \sqrt{52}$$

$$\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{ED}| = \sqrt{0^2+(-6)^2+(-4)^2} = \sqrt{52}$$

$$\cos(\varepsilon) = \frac{\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}}{\left|\overrightarrow{EC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{ED}\right|} = \frac{0-36+16}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{52}} = \frac{-20}{52} \approx -0{,}385 \text{, also } \varepsilon \approx 112{,}6°$$

Alternative: Elementargeometrische Berechnung über $\tan(\frac{\varepsilon}{2}) = \frac{6}{4}$ .

## 2.2 Solarmodule auf der südlichen Dachfläche

### 2.2.1 Solarmodule alle längs oder quer anordnen **4,0 Punkte**

Die Dachfläche ist ein Rechteck mit der Länge $a = 20$ und

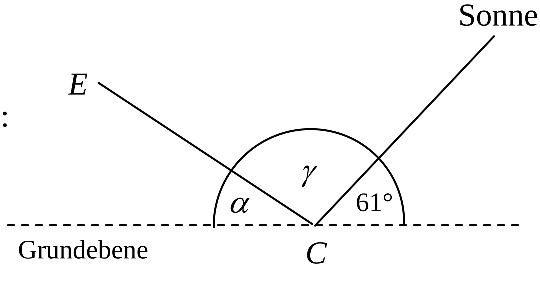
der Breite $b = |\overrightarrow{EC}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{52} \approx 7{,}2$

- Module längs montiert
  (20,0 – 0,6) : 1,6 = 12 (mit Rest) ; (7,2 – 0,6) : 1,0 = 6 (mit Rest)
  Anzahl der Module in diesem Fall: 12 · 6 = 72
- Module quer montiert
  (20,0 – 0,6) : 1,0 = 19 (mit Rest) ; (7,2 – 0,6) : 1,6 = 4 (mit Rest)
  Anzahl der Module in diesem Fall: 19 · 4 = 76

Legt man die Module längs, so passen 72 Module auf die Dachfläche, legt man sie quer, so reicht die Dachfläche für 76 Module. Also sollte man die Module quer montieren.

### 2.2.2 Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Flächen der Solarmodule fallen **3,5 Punkte**

Berechnet werden soll zunächst der Winkel $\alpha$ zwischen der südlichen Dachebene und der Grundebene.




- Normalenvektor der südlichen Dachfläche:

$$\overrightarrow{EC} \times \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -80 \\ -120 \end{pmatrix}$$

Wähle $\vec{n}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}_S| = \sqrt{0^2+2^2+3^2} = \sqrt{13}$

- Normalenvektor der Grundebene (parallel zur $x$-$y$-Ebene)

  Wähle $\vec{n}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}_{xy}| = 1$

Für den Winkel $\alpha$ folgt dann:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_S \cdot \vec{n}_{xy}}{\left|\vec{n}_S\right| \cdot \left|\vec{n}_{xy}\right|} = \frac{3}{\sqrt{13} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 0{,}832 \quad \text{, also } \alpha \approx 33{,}7°$$

Für den Winkel $\gamma$ zwischen der Dachfläche und dem Sonnenstrahl folgt dann:

$\gamma = 180° - (33{,}7° + 61{,}0°) = 85{,}3°$

## 2.3 Mobilfunkantenne auf der nördlichen Dachfläche

### 2.3.1 Länge des Maststücks **2,5 Punkte**

Betrachtet wird die Gerade $g$ durch $S$ (11 | –3 | 14) senkrecht zur $x$-$y$-Ebene:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Schnitt dieser Geraden $g$ mit der nördlichen Dachebene $e_N$ ergibt den Punkt $Q$:

$$e_N \cap g: \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 30 = 0 \Leftrightarrow 48 + \lambda \cdot 3 - 30 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -6$$

Einsetzen: $\vec{q} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + (-6) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ ; also $Q(11 \,|\, -3 \,|\, 8)$

Der Unterschied der $z$-Koordinaten der Punkte $S$ und $Q$ ergibt die gesuchte Länge.

Der Mast ragt also 14 m – 8m = 6 m aus der Dachfläche heraus.

### 2.3.2 Lotfußpunkt auf der Strecke $\overline{DE}$ **3,5 Punkte**

Gesucht ist der Lotfußpunkt $L$ von $S$ zur Geraden durch $D$ und $E$.

Gerade $h$ durch $D$ und $E$: $\vec{x} = \vec{d} + \lambda \cdot \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 20 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

- *Berechnung des Lotfußpunktes*:

  Hilfsebene durch $S$ senkrecht zur Gerade durch $D$ und $E$:

$$e_H: \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 38 = 0$$

Einsetzen von $h$ in $e_H$:

$$\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}20\\-6\\6\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix}\right]-38=0 \;\Leftrightarrow\; -12+52\lambda-38=0 \;\Leftrightarrow\; \lambda=\frac{50}{52}$$

- *Überprüfung bezüglich der Strecke* $\overline{DE}$:

  Wegen $0 < \frac{50}{52} < 1$ liegt der Lotfußpunkt $L$ auf der Strecke $\overline{DE}$.

## 2.4 Plane vor dem westlichen Giebel

### 2.4.1 Punkte mit gleichem Abstand von den Punkte *C* und *E* **1,0 Punkte**

Die zu beschreibende Punktmenge ist die Ebene mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{CE}$, welche durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{CE}$ verläuft.

### 2.4.2 Gleiche *y*-Koordinaten **2,0 Punkte**

Die Menge aller Punkte der Grundebene, die von $C$ und $E$ denselben Abstand haben, ist die Schnittgerade der Mittelebene der Strecke $\overline{CE}$ mit der $x$-$y$-Ebene.

Beide Ebenen haben den Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ als Richtungsvektor.

Deshalb ist dies auch ein Richtungsvektor der Schnittgeraden der beiden Ebenen.

Dieser Richtungsvektor lässt gemäß der Parametergleichung der Schnittgerade die $y$-Koordinate (und die $z$-Koordinate) unverändert.

# Aufgabe 3
# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

In der Saison 2011/12 gewannen die Spieler der Miami Heat den Meistertitel in der amerikanischen Basketball-Profi-Liga.

**3.1** Zum Kader der Miami Heat zählten sechs Guards (Aufbauspieler), vier Centers (zentrale Spieler unter dem Korb) und sieben Forwards (Flügelspieler).

**3.1.1** Geben Sie die Anzahl der Möglichkeiten an, alle Spieler des Kaders zur Präsentation nacheinander auf das Spielfeld zu rufen.

**3.1.2** Beim Basketball sind beim Start stets genau fünf Spieler („Starting Five") jeder der beiden Mannschaften auf dem Feld. Berechnen Sie die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten des Trainers der Miami Heat, seine Gruppe der „Starting Five" zu bilden.

**3.1.3** Üblicherweise besteht die Startaufstellung aus zwei Guards, einem Center und zwei Forwards.
Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für eine solche 2-1-2-Aufstellung.

**3.2** Ein Foulspiel wird im Basketball mit Freiwürfen geahndet. Im Folgenden wird ein so genannter Doppelfreiwurf betrachtet, bei dem ein Spieler zweimal nacheinander in Richtung Korb wirft. Die Ereignisse, beim ersten bzw. beim zweiten Wurf in den Korb zu treffen, sind dabei abhängig, was sich leicht mithilfe der Sportpsychologie erklären lässt.

LeBron James, der Starspieler der Miami Heat, traf in der vergangenen Saison bei einem Doppelfreiwurf mit der Wahrscheinlichkeit 75 Prozent beim ersten Wurf in den Korb. Die Trefferwahrscheinlichkeit beim zweiten Wurf betrug ebenfalls 75 Prozent. Die Wahrscheinlichkeit für zwei Treffer nacheinander lag jedoch nur bei 60 Prozent.

**3.2.1** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass LeBron James auch beim zweiten Freiwurf trifft, wenn er bereits beim ersten Freiwurf getroffen hat.
[zur Kontrolle: 80 Prozent]

**3.2.3** Legen Sie für Wurf 1 und Wurf 2 eine vollständig beschriftete Vierfeldertafel an oder zeichnen Sie ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm.

**3.2.3** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass LeBron James ...

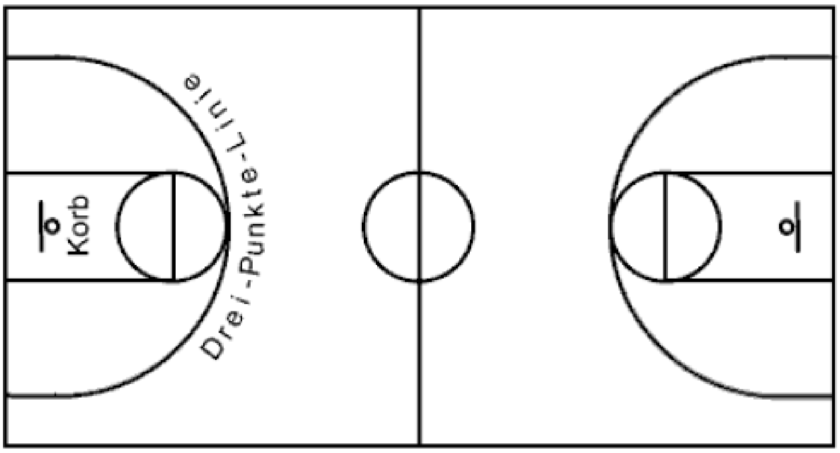
3.2.3.1 ... bei einem Doppelfreiwurf mindestens einmal trifft.

3.2.3.2 ... bei einem Doppelfreiwurf genau einmal trifft.

3.2.3.3 ... beim zweiten Wurf trifft, wenn er beim ersten Wurf nicht trifft.

**3.3** Ein Spieler erzielt drei Punkte, wenn er beim Wurf oder beim Absprung weiter vom Korb entfernt ist als die am Boden markierte Drei-Punkte-Linie und der Ball im Korb landet.

Chris Bosh hatte in der Saison 2011/2012 mit 54 Prozent die höchste Trefferquote bei Drei-Punkte-Würfen im Team der Miami Heat.




**3.3.1** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Chris Bosh genau acht von zehn Drei-Punkte-Würfen verwandelt.

**3.3.2** Ermitteln Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass Chris Bosh bei zehn Drei-Punkte-Würfen höchstens siebenmal den Korb trifft.

**3.3.2** Bestimmen Sie, wie viele Drei-Punkte-Würfe Chris Bosh benötigt, um mit mindestens 99%-iger Sicherheit wenigstens einmal den Korb zu treffen.

**3.4** Im NBA-Finale spielen die zwei aus den Ausscheidungsspielen („Playoffs“) qualifizierten Mannschaften so oft gegeneinander, bis eine der beiden Mannschaften vier Spiele für sich entschieden hat; ein Unentschieden ist dabei nicht möglich („Best-of-seven“).

Im Folgenden werden die beiden im Finale stehenden Mannschaften als gleich stark eingeschätzt.

**3.4.1** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Finale aus vier Spielen besteht.

**3.4.2** Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Finale nach fünf Spielen zu Ende?

# L ö s u n g e n

## 3.1 Kombinatorik

**3.1.1 Alle Spieler des Kaders kommen nacheinander auf das Spielfeld.** **1,0 Punkte**

$17! \approx 356 \cdot 10^{12}$

**3.1.2 Bildung der Gruppe „Starting Five“** **1,0 Punkte**

$\binom{17}{5} = 6\,188$ (Auswahl: 5 aus 17)

**3.1.3 Möglichkeiten für eine 2-1-2-Aufstellung** **2,0 Punkte**

$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{7}{2} = 1\,260$

( Guards: 2 aus 6
Center: 1 aus 4
Forwards: 2 aus 7 )

## 3.2 Zweistufige Zufallsexperiment

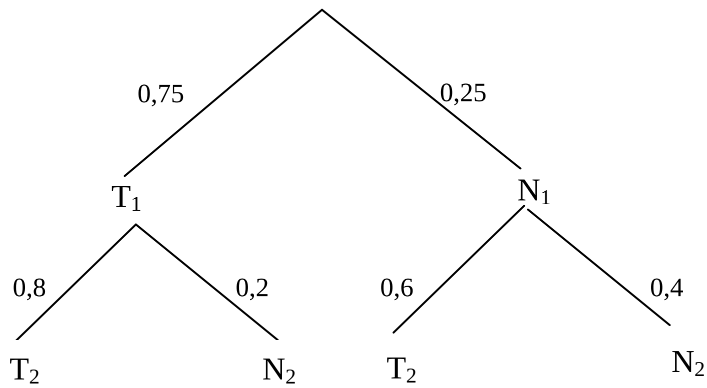
$T_1$ : Treffer beim ersten Wurf
$T_2$ : Treffer beim zweiten Wurf
$N_1$ : kein Treffer beim ersten Wurf
$N_2$ : kein Treffer beim zweiten Wurf

**3.2.1 LeBron James triff auch beim 2.Wurf, wenn er schon beim 1. Wurf getroffen hat** **1,5 Punkte**

$$P_{T_1}(T_2) = \frac{P(T_2 \cap T_1)}{P(T_1)} = \frac{0{,}60}{0{,}75} = 0{,}8 = 80\ \%$$

**3.2.2 Vierfeldertafel oder Baumdiagramm** **3,0 Punkte**

| | $T_1$ | $N_1$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|
| $T_2$ | 0,60 | 0,15 | 0,75 |
| $N_2$ | 0,15 | 0,1 | 0,25 |
| $\sum$ | 0,75 | 0,25 | 1 |




**3.2.3 LeBron James**

**3.2.3.1 Beim Doppelfreiwurf mindestens ein Treffer** **1,5 Punkte**

Hier ist die Betrachtung des Gegenereignisses günstiger.

$P(T_1 \cup T_2) = 1 - P(\overline{T_1 \cup T_2}) = 1 - P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}) = 1 - 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}9 = 90\%$

**3.2.3.2 Beim Doppelwurf genau ein Treffer** **1,5 Punkte**

$P(T_1 \cap N_2) + P(T_2 \cap N_1) = 0{,}75 \cdot 0{,}2 + 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}3 = 30\%$

**3.2.3.3 Treffer beim 2. Wurf, wenn er beim 1. Wurf nicht getroffen hat** **2,0 Punkte**

$$P_{N_1}(T_2) = \frac{P(T_2 \cap N_1)}{P(N_1)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}6}{0{,}25} = 0{,}6 = 60\ \%$$

### 3.3 Chris Bosch

Es liegt eine Bernoulli-Kette mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p$ = 0,54 vor.

**3.3.1 Genau 8 Treffer bei 10 Würfen** ($n$ = 10) **1,5 Punkte**

$P(\mathrm{T} = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}54^8 \cdot 0{,}46^2 \approx 0{,}069 = 6{,}9\%$

**3.3.2 Höchstens 7 Treffer bei 10 Würfen** ($n$ = 10) **2,0 Punkte**

$P(\mathrm{T} \leq 7) = 1 - P(\ \mathrm{T} \geq 8)$

$= 1 - \left( \binom{10}{8} \cdot 0{,}54^8 \cdot 0{,}46^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}54^9 \cdot 0{,}46^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}54^{10} \cdot 0{,}46^0 \right)$

$= 1 - (0{,}069 + 0{,}018 + 0{,}002) = 1 - 0{,}0089 = 0{,}911 = 91{,}1\%$

**3.3.3 Berechnung der Kettenlänge** **3,5 Punkte**

$$P(T \geq 1) > 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(T = 0) > 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}54^0 \cdot 0{,}46^n > 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0{,}46^n > 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 0{,}76^n < 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}46)} \approx 5{,}93$$

Der Spieler Chris Bosh benötigt mindestens 6 Drei-Punkte-Würfe.

### 3.4 NBA-Finale

*A:* Mannschaft A gewinnt das Spiel
*B:* Mannschaft B gewinnt das Spiel

**3.4.1 Finale mit genau 4 Spielen** **2,0 Punkte**

$P$(Spieleanzahl 4) = $P$(*Eine Mannschaft gewinnt die ersten 4 Spiele*)
= $P((A,A,A,A)) + P((B,B,B,B))$
= $0{,}5^4 + 0{,}5^4 = 0{,}125 = 12{,}5\%$

**3.4.2 Finale mit genau 5 Spielen** **2,5 Punkte**

$P$(Spieleanzahl 5) = $P((B,A,A,A,A)) + P((A,B,A,A,A)) + P((A,A,B,A,A))$
$+ P((A,A,A,B,A)) + P((A,B,B,B,B)) + P((B,A,B,B,B))$
$+ P((B,B,A,B,B)) + P((B,B,B,A,B))$
$= 0{,}5^5 \cdot 8 = 0{,}25 = 25{,}0\%$

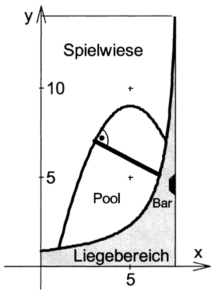
# Schriftliche Abiturprüfung 2013

## G-Kurs

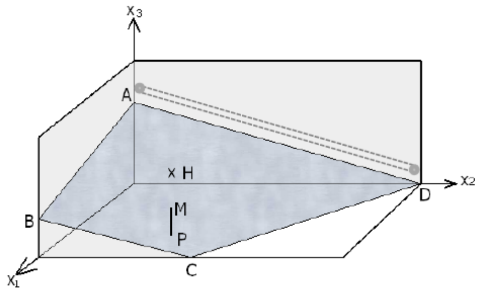
## Haupttermin

**Themenübersicht**

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Betrachtung einer ganzrationalen Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{7}{2}$ und einer gebrochenrationalen Funktion $h(x) = \frac{7}{8-x}$
  - Modellierung: Spielwiese mit Pool
  - Untersuchungen zur e-Funktion $f(x) = (6+3x) \cdot e^{-0,5\,x}$




- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Modellierung: Wintersporthalle
  - Nachweis Trapezeigenschaften
  - Winkel zwischen zwei Ebenen
  - Abstand Punkt-Ebene
  - Volumenberechnung




- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Modellierung: Eurojackpot
  - Erstellen eines Baumdiagramms
  - Erstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel (mit absoluten Werten)
  - Bernoulli-Kette

SOFTFRUTTI verlag
www.softfrutti.de

# Aufgabe 1
# ANALYSIS

**1.** Gegeben sind die Funktionen

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{7}{2} \quad \text{und} \quad h: D_{\max} \to \mathbb{R} \text{ mit } h(x) = \frac{7}{8-x}\ .$$

1.1.1 Bestimmen Sie den Hochpunkt des Graphen der Funktion $f$.

1.1.2 Berechnen Sie den Punkt, in dem der Graph von $f$ die $y$-Achse schneidet.

**1.2** Untersuchen Sie nun die Funktion $h$.

1.2.1 Bestimmen Sie für die Funktion $h$ den maximalen Definitionsbereich.

1.2.2 Geben Sie die waagrechte und die senkrechte Asymptote der Funktion $h$ an und bestimmen Sie die Grenzwerte von $h$ an der Definitionslücke sowie für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.

1.2.3 Beschreiben Sie die Lage der Punkte $P_1(4{,}5 \mid h(4{,}5))$ und $P_2(11{,}5 \mid h(11{,}5))$ bezüglich des Punktes $(8 \mid 0)$ und begründen Sie Ihre Aussage.

1.3 Bestätigen Sie:
Die Graphen der Funktionen $f$ und $h$ haben die Punkte $G_1(1 \mid 1)$ und $G_2(7 \mid 7)$ gemeinsam.

1.4 Skizzieren Sie unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse die Schaubilder der Funktionen $f$ und $h$ in ein gemeinsames Koordinatensystem im Intervall $[-1\,;\,13]$.
(1 Längeneinheit = 0,5 cm)

1.5 Ein Sporthotel plant eine etwa 10 000 m$^2$ große Außenanlage, die in einen Pool mit Liegebereich und Spielwiese aufgeteilt wird. Abbildung 1 zeigt die Anlage in der Draufsicht. Dabei gilt: 1 Längeneinheit = 10 m. Die Berandung des Pools kann durch die Funktionen $f$ und $h$ (aus 1.) beschrieben werden.

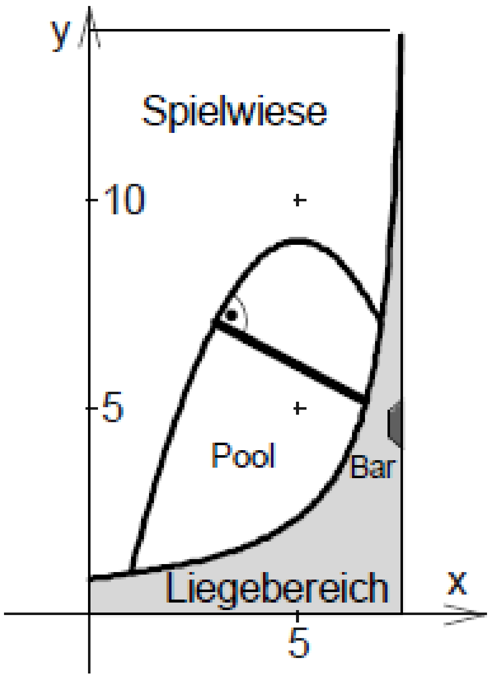



Abbildung 1

1.5.1 Der Hotelprospekt wirbt mit der Aussage:

*„80 m Kraulen ohne Wende, ohne Kurven! In unserem Pool kein Problem.“*

Bestätigen Sie, dass diese Aussage stimmt.

1.5.2 Der 75 m breite Liegebereich mit Sonnenliegen und Esstischen wird vollständig gepflastert.

Welche Materialkosten muss der Architekt einplanen, wenn er für einen Quadratmeter 28,50 € veranschlagt?

1.5.3 Um den Weg zwischen Spielwiese und Getränkebar abzukürzen, wird eine Fußgängerbrücke über den Pool gebaut. Diese verläuft senkrecht zur oberen Poolberandung und beginnt in (3 | 7) (siehe Abbildung 1).

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die die Lage der Brücke beschreibt.

**2.** Abbildung 2 zeigt die Graphen zweier Funktionen

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = (6+3x) \cdot e^{-0,5x}$$

und

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = (-3x-6) \cdot e^{-0,5x} \; .$$

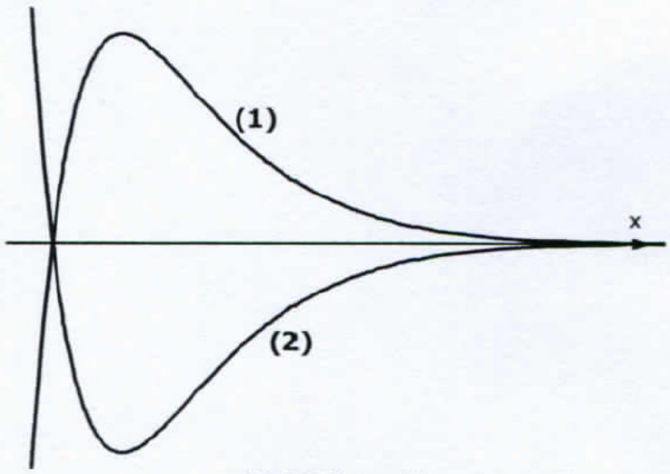



Abbildung 2

2.1 Ordnen Sie den Graphen die passende Funktionsgleichung zu und begründen Sie jeweils Ihre Zuordnung.

2.2 Erläutern, wie der Graph von $g$ aus dem Graphen von $f$ hervorgeht und begründen Sie Ihre Aussage anhand der Funktionsgleichungen.

2.3 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Graphen.

2.4 Die Graphen von $f$ und $g$ über $[-2\,;+\infty[$ sollen den Querschnitt durch eine Zwiebel darstellen.

Zeigen Sie:
An ihrer dicksten Stelle ist die Zwiebel 12 Längeneinheiten dick.

[ Zur Kontrolle: $f'(x) = -1,5x \cdot e^{-0,5x}$ ]

# L ö s u n g e n

## 1.1 Untersuchung der Funktion *f*

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{7}{2}$ .

### 1.1.1 Hochpunkt des Graphen von *f* — **2,5 Punkte**

Ableitungen: $f'(x) = -x + 5$ ; $f''(x) = -1$

- Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$
- Hinreichende Bedingung: $f''(5) = -1 < 0$ , also liegt eine Maximumstelle vor.
- Angabe des Extrempunkts: Mit $f(5) = 9$ ergibt sich der Hochpunkt $H(5 \mid 9)$.

### 1.1.2 Schnittpunkt mit der *x*-Achse — **0,5 Punkte**

Wegen $f(0) = -\frac{7}{2} = -3{,}5$ ergibt sich $S(0 \mid -3{,}5)$.

## 1.2 Untersuchung der Funktion *h*

Betrachtet wird nun die Funktion mit der Gleichung $h(x) = \frac{7}{8-x}$ .

### 1.2.1 Maximale Definitionsmenge — **0,5 Punkte**

Es gilt $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{8\}$ , denn 8 ist Nullstelle der Nennerfunktion von *h*.

### 1.2.2 Asymptoten und Grenzwerte — **3,0 Punkte**

- waagerechte Asymptote: *x*-Achse, denn *h* ist ein echt gebrochenrationale Funktion.
- senkrechte Asymptote: $x = 8$ , denn 8 ist Definitionslücke von *h* .
- Grenzwerte: $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0^+$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0^-$

  $\lim\limits_{x \to 8^-} h(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 8^+} h(x) = -\infty$

### 1.2.3 Lage der Punkte $P_1$ und $P_2$ — **3,0 Punkte**

8 ist die Mitte zwischen 4,5 und 11,5.
Es gilt: $h(11{,}5) = -2 = -h(4{,}5)$ .
Die Punkte $P_1(4{,}5 \mid 2)$ und $P_2(11{,}5 \mid -2)$ liegen also punktsymmetrisch zu $(8 \mid 0)$.

## 1.3 Schnittpunkte $G_1$ und $G_2$ der Graphen von *g* und *h* — **1,0 Punkte**

Die Berechnung der zugehörigen Funktionswerte ergibt:

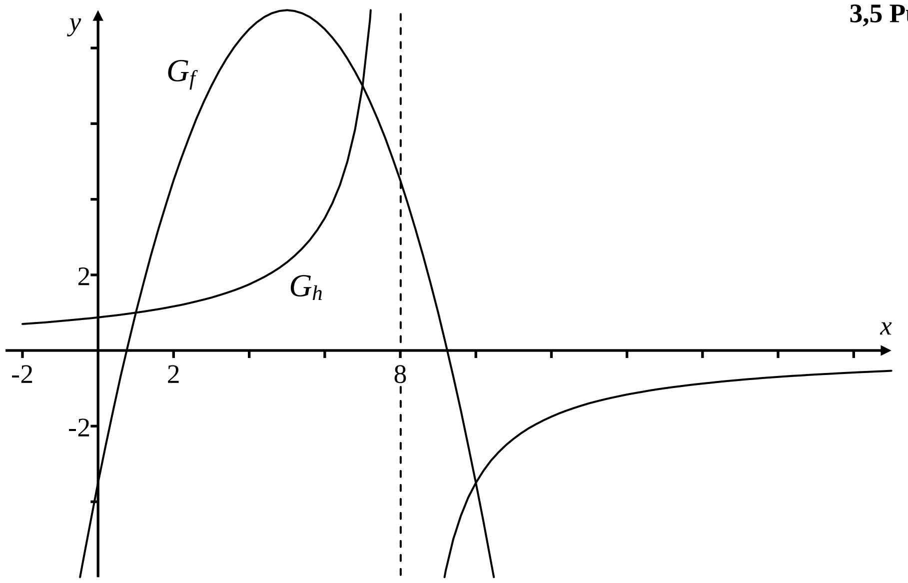
$$f(1) = -\frac{1}{2} \cdot (1)^2 + 5 \cdot 1 - \frac{7}{2} = 1 \quad ; \quad h(1) = \frac{7}{8-1} = 1$$

$$f(7) = -\frac{1}{2} \cdot (7)^2 + 5 \cdot 7 - \frac{7}{2} = 7 \quad ; \quad h(7) = \frac{7}{8-7} = 7$$

Die Graphen von *g* und *h* haben also die Punkte $G_1$ und $G_2$ gemeinsam.

## 1.4 Graph

**3,5 Punkte**




## 1.5 Außenanlage Sporthotel

### 1.5.1 80 m Kraulen möglich

**3,0 Punkte**

Abstand der Punkte $G_1(1 \mid 1)$ und $G_2(7 \mid 7)$:

$$d^2 = (7-1)^2 + (7-1)^2 = 36 + 36 = 72 \quad ; \quad d = \sqrt{72} \approx 8{,}49$$

Zwischen den Punkte $G_1$ und $G_2$ beträgt die Kraulstrecke etwa 8,49 · 10 ≈ 85 m.
Die Aussage des Hotelprospekts trifft also zu.

<u>Alternative</u>: Der Abstand der Punkte (1 | 1) und (5 | 9) beträgt $\sqrt{80} \approx 8{,}94$.
Die entsprechende Kraulstrecke ist in diesem Fall etwa 89 m lang.

### 1.5.2 Pflasterung des Liegebereichs

**3,0 Punkte**

Gesucht ist das Maß der Fläche zwischen $G_h$ und der $x$-Achse über dem Intervall [0 ; 7,5].

$$\int_0^{7,5} h(x)\,dx = \int_0^{7,5} \frac{7}{8-x}\,dx = 7 \cdot \int_0^{7,5} \frac{1}{8-x}\,dx = 7 \cdot \left[-\ln|8-x|\right]_0^{7,5}$$

$$= 7 \cdot [-\ln(0{,}5) - (-\ln(8))] \approx 19{,}41$$

Flächeninhalt: $19{,}41 \cdot 100\ \text{m}^2 = 1\,941\ \text{m}^2$

Kosten: $1\,941\ \text{m}^2 \cdot 28{,}50\ \frac{€}{\text{m}^2} = 55\,318{,}50\ €$

### 1.5.3 Fußgängerbrücke über dem Pool

**3,0 Punkte**

Gesucht ist eine Gleichung der Normalen an den Graphen von $f$ im Punkt (3 | 7).

- Ableitung: $f'(x) = -x + 5$
- Steigung der Tangente in (3 | 7): $m_t = f'(3) = -3 + 5 = 2$
- Steigung der Normale in (3 | 7): $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{2}$
- Gleichung der Normalen: $y = m_n \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (x-3) + 7$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$$

## 2. Abbildung mit den Graphen zweier Funktionen *f* und *g*

Betrachtet werden die Funktionen $f(x) = (6+3x) \cdot \mathrm{e}^{-0,5\,x}$ und $g(x) = (-3x-6) \cdot \mathrm{e}^{-0,5\,x}$.

### 2.1 Zuordnung der Graphen zu den Funktionsgleichungen — 2,0 Punkte

Graph (1) gehört zur Funktion *f*, Graph (2) zur Funktion *g*.

Mögliche Begründung: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0^-$

### 2.2 Entstehung des Graphen von *f* aus dem Graphen von *g* — 1,0 Punkte

Wegen $f(x) = -g(x)$ sind die Graphen spiegelbildlich zur *x*-Achse.

### 2.3 Schnittpunkt der Graphen — 2,5 Punkte

Schnittbedingung:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; (6+3x) \cdot \mathrm{e}^{-0,5\,x} &= (-3x-6) \cdot \mathrm{e}^{-0,5\,x} \quad \mid :\ \mathrm{e}^{-0,5\,x} \neq 0 \\ \Leftrightarrow\; 6+3x &= -3x-6 \\ \Leftrightarrow\; 6x &= -12 \\ \Leftrightarrow\; x &= -2 \end{aligned}$$

Wegen $f(-2) = g(-2) = 0$ ergibt sich der Schnittpunkt $S(-2 \mid 0)$.

### 2.4 Dickste Stelle der Zwiebel — 3,5 Punkte

Das Schaubild zeigt: Die dickste Stelle der Zwiebel ergibt sich aus den Funktionswerten an der Extremstelle von *f* und *g*.

- *Ableitung* (1,5 P)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot \mathrm{e}^{-0,5\,x} + (6+3x) \cdot \mathrm{e}^{-0,5\,x} \cdot (-0,5) \\ &= 3\mathrm{e}^{-0,5\,x} - 3\mathrm{e}^{-0,5\,x} + 1,5x\,\mathrm{e}^{-0,5\,x} \\ &= -1,5x \cdot \mathrm{e}^{-0,5\,x} \end{aligned}$$

- *Nullstelle von* $f'$ (0,5 P)

  $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ (mit Vzw. der Form + 0 –
  also Maximumstelle)

- *Funktionswert* (1,0 P)

  $f(0) = 6$

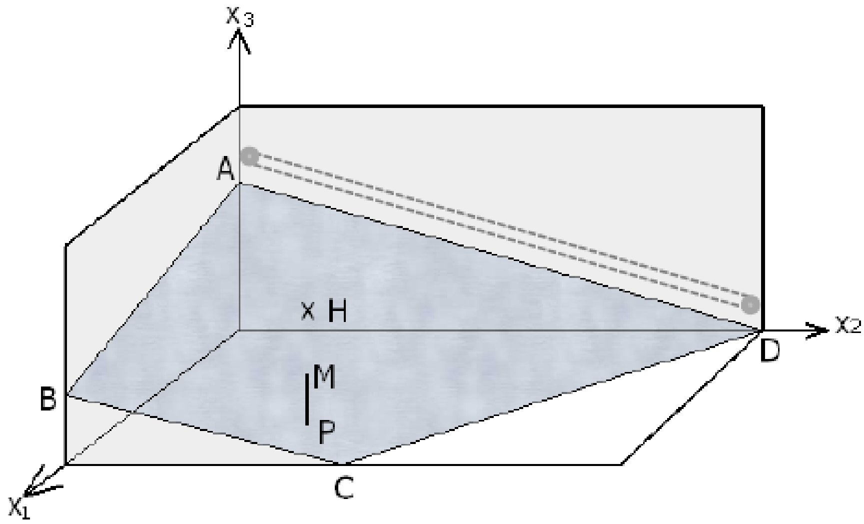
  Wegen der Symmetrie zu *x*-Achse gilt: $g(0) = -6$

- *Ergebnis* (0,5 P)

  An ihrer dicksten Stelle $x = 0$ ist die Zwiebel 12 Längeneinheiten dick.

# Aufgabe 2
# ANALYTISCHE GEOMETRIE

Die folgende Abbildung zeigt den Ausschnitt einer Lagerhalle, die zu einer Wintersporthalle umgebaut werden soll.
Der dargestellte Bereich hat eine Länge von 60 m, eine Breite von 30 m und eine Höhe von 30 m. In ihm wird eine Piste als Ebene durch die Punkte $A(0 \mid 0 \mid 20)$, $B(30 \mid 0 \mid 10)$ und $D(0 \mid 60 \mid 0)$ festgelegt. Der Hallenboden liegt dabei in der $x_1$-$x_2$-Ebene.




**1.** Der Punkt $C$ liegt in der Mitte der vorderen Bodenkante.
Geben Sie die Koordinaten von $C$ an.

**2.** Von $D$ nach $A$ wird ein Schlepplift eingebaut. Das Schleppseil verläuft parallel zur Pistenkante $\overline{DA}$ über je eine Umlenkrolle an den Enden. Berechnen Sie die Länge des Seiles, wenn der Rollendurchmesser vernachlässigt werden darf.

**3.** Ein Trapez besitzt mindestens ein Paar paralleler Seiten.
Zeigen Sie: Das Viereck $ABCD$ hat die Form eines Trapezes.

**4.** Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $e_p$**,** in der die Piste liegt.
[ Zur Kontrolle und weiteren Verwendung: $e_p : x_1 + x_2 + 3x_3 = 60$ ]

**5.** Welchen Winkel schließt die Pistenebene $e_p$ mit dem Hallenboden ein?

**6.** Im Punkt $P(20 \mid 20 \mid 0)$ steht senkrecht zum Hallenboden ein Stützpfeiler unter der Piste. Bestimmen Sie den Punkt $M$, in dem der Pfeiler die Pistenebene $e_p$ erreicht.

**7.** Um den Spaßfaktor zu erhöhen, wurde auf der Piste ein Hügel aus Schnee errichtet. Sein höchster Punkt liegt in $H(20 \mid 20 \mid 10)$.
Welchen Abstand hat die Hügelspitze $H$ von der Pistenebene $e_p$?

**8.** Am Ende der Piste befindet sich auf dem Hallenboden eine dreieckige Auslauffläche. Diese bekommt eine 40 cm hohe Schneedecke.
Wie viel $m^3$ müssen mit Schnee aufgefüllt werden?

**9.** Begründen Sie:
Die Wege von $C$ nach $B$, von $B$ nach $A$ und von $D$ nach $A$ sind gleich steil.

# L ö s u n g e n

**1. Punkt $C$ in der Mitte der vorderen Bordkante** **0,5 Punkte**

Punkt $C(30 \mid 30 \mid 0)$ ($x_1$-Koordinate: wie $B$ ;
$x_2$-Koordinate: halber Wert der $x_2$-Koordinate: von $D$ ;
$x_3$-Koordinate: 0, da in $x_1$-$x_2$-Ebene gelegen)

**2. Seillänge** **1,0 Punkte**

Die Seillänge entspricht der doppelten Länge des Vektors $\overrightarrow{AD}$.

Es gilt: $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ -20 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{0^2 + 60^2 + 20^2} = \sqrt{4000} \approx 63{,}25$

Die Seillänge (ohne Rollen) beträgt also 126,50 m.

**3. Nachweis der Trapezeigenschaft** **1,0 Punkte**

Zu zeigen: Es gibt ein Paar paralleler Seiten im Viereck *ABCD*.

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ -20 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ -10 \end{pmatrix}$

Daher gilt $\overrightarrow{AD} = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$ und damit $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ .

**4. Koordinatengleichung der Ebene, in der die Piste liegt** **3,0 Punkte**

– Aufpunkt der gesuchten Ebene: $A(0 \mid 0 \mid 20)$

– Richtungsvektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ -20 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

– Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

– Normalengleichungen von $e_p$:

- Punktnormalengleichung: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}) = 0$

- Allgemeine Normalengleichung: $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 60 = 0$
- Koordinatengleichung: $x_1 + x_2 + 3x_3 = 60$

## 5. Winkel der Pistenebene mit dem Hallenboden **2,0 Punkte**

Gesucht ist der Winkel zwischen der Ebene $e_P$ und der $x_1$-$x_2$-Ebene.
Normalenvektoren:

- Ebene $e_p$: $\vec{n}_P = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$
- $x_1$-$x_2$-Ebene : $\vec{n}_{Hb} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (Hallenboden):

Für den gesuchten Winkel ergibt sich damit:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_{Hb} \cdot \vec{n}_P}{\left|\vec{n}_{Hb}\right| \cdot \left|\vec{n}_P\right|} = \frac{3}{\sqrt{11} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{11}} \approx 0{,}9045 \quad ; \quad \text{es folgt } \alpha \approx 25{,}24° .$$

## 6. Punkt *M*, in dem der Pfeiler die Pistenebenen erreicht **2,0 Punkte**

Der Stützpfeiler kann beschrieben werden durch die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}20\\20\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(Aufpunkt: gegebener Punkt $P(20 \mid 20 \mid 0)$
Richtungsvektor: senkrecht zu $x_1$-$x_2$-Ebene)

Gesucht ist der Schnittpunkt der Gerade $g$ mit der Ebene $e_P$ der Piste.
Einsetzen der Gleichung von $g$ in die Gleichung von $e_P$ ergibt:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}20\\20\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] - 60 = 0 \Leftrightarrow 40 + 3\lambda - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda = 20$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{20}{3}$$

Einsetzen dieses Wertes in die Gleichung von $g$ ergibt den Punkt $M(20 \mid 20 \mid \frac{20}{3})$.

**7. Abstand der Hügelspitze von der Pistenebene** **2,0 Punkte**

Gesucht ist der Abstand des Punktes $H(20 \mid 20 \mid 10)$ von der Ebene $e_P$ .

*1. Möglichkeit*: Verwendung der Abstandsformel:

Als Punkt der Ebene wird $A(0 \mid 0 \mid 20)$ verwendet.

Dann gilt: $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix}$

$$d(H\,;\,e_P) = \frac{1}{|\vec{n}_P|} \cdot |\,\vec{n}_P \cdot \overrightarrow{AH}\,| = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix} \right| = \frac{10}{\sqrt{11}} \approx 3{,}02$$

Der Abstand Spitze – Piste beträgt etwa 3 m.

*2. Möglichkeit*: Anwendung der Lotgeradenmethode

Ebene $e_P$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 60 = 0$

Lotgerade $l$: $\vec{x} = \vec{h} + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] - 60 = 0 \Leftrightarrow 70 + 11\lambda - 60 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{10}{11}$$

(Die konkrete Berechnung der Koordinaten des Lotfußpunkts $L$ ist nicht unbedingt erforderlich. Der gesuchte Abstand ergibt schon allein aus dem Parameterwert $\lambda = -\frac{10}{11}$ )

Es folgt:

$$|\,\overrightarrow{HL}\,| = |\,\vec{h} - \vec{l}\,| = |-\frac{10}{11} \cdot \vec{n}\,| = \frac{10}{11} \cdot |\,\vec{n}\,| = \frac{10}{11} \cdot \sqrt{11} = \frac{10}{\sqrt{11}} \approx 3{,}02$$

Der Abstand Spitze – Piste beträgt etwa 3 m.

**8. Volumen der Schneemenge** **2,0 Punkte**

Die dreieckige Auslauffläche ist rechtwinklig mit zwei Katheten der Länge 30 m.

Damit ergibt sich als Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot 30\text{ m} \cdot 30\text{ m} = 450\text{ m}^2$

Volumen: $V = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = 450\text{ m}^2 \cdot 0{,}40\text{ m} = 180\text{ m}^3$

Es müssen also $180\text{ m}^3$ mit Schnee gefüllt werden.

<u>Alternative</u>: Flächenberechnung vektorgeometrisch über den Punkt $E(30 \mid 60 \mid 0)$.

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\,\overrightarrow{EC} \times \overrightarrow{ED}\,| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -900 \end{pmatrix} \right| = 450$$

**9. Gleiche Steilheit der Wege** **1,5 Punkte**

Es gilt: $C(30 \mid 30 \mid 0)$ ; $B(30 \mid 0 \mid 10)$ ; $A(0 \mid 0 \mid 20)$ ; $D(0 \mid 60 \mid 0)$

- Der Weg von *C* nach *B* steigt auf 30 m um 10 m an: Steigung $m = \frac{1}{3}$
- Der Weg von *B* nach *A* steigt auf 30 m um 10 m an: Steigung $m = \frac{1}{3}$
- Der Weg von *D* nach *A* steigt auf 60 m um 20 m an: Steigung $m = \frac{1}{3}$

Alle Wege sind gleich steil.

<u>Alternative</u>: Argumentation über Winkel und Parallelität

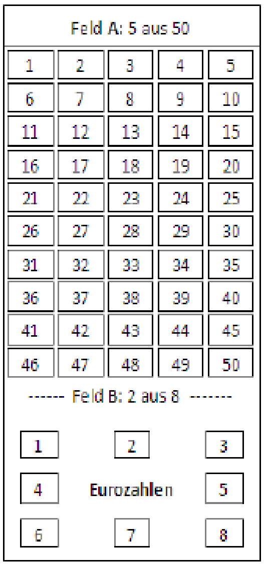
# Aufgabe 3
# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

**1.** Seit März 2012 kann man in Deutschland den *Eurojackpot* spielen. Es handelt sich dabei um eine Lotterie, bei der Personen aus sieben EU-Ländern teilnehmen können.
Die Abbildung rechts zeigt ein Tippfeld eines *Eurojackpot*-Spielscheins. Es gibt pro Spiel zwei voneinander unabhängige Ziehungen:

In einer ersten Ziehung (Feld A auf dem Tippschein) werden 5 von 50 Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen.

In der zweiten Ziehung werden die beiden so genannten Eurozahlen ebenfalls nacheinander ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge aus 8 möglichen Zahlen gezogen (Feld B auf dem Tippschein).

Es gibt verschiedene Gewinnklassen. In der Gewinnklasse I kann man den Jackpot mit mindestens 10 Millionen Euro gewinnen. Dazu muss man in den beiden Feldern A und B alle Gewinnzahlen richtig angekreuzt haben.




1.1 Geben Sie für beide Ziehungen jeweils die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten an.

1.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit die Gewinnklasse I zu erreichen.

1.3 Herr Maier hat zwei Eurozahlen im Feld B angekreuzt. Die Ziehung der beiden Eurozahlen aus Feld B kann mit einem zweistufigen Baumdiagramm verdeutlicht werden.
Dabei soll für einen Treffer T gelten:

T: Die gezogene Zahl ist eine der beiden von Herrn Maier angekreuzten Zahlen.

Fertigen Sie zu diesem Sachverhalt ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Herr Maier keine Eurozahl richtig angekreuzt hat.

**2.** Glücksspiel kann süchtig machen. Eine Studie beschäftigte sich deshalb mit der Spielsucht. Dazu wurden insgesamt 4000 Personen befragt, darunter 2800 Männer und 1200 Frauen. Es stellte sich heraus, dass 10 der befragten Männer und 3 der befragten Frauen spielsüchtig waren.

2.1 Veranschaulichen Sie die Ergebnisse dieser Studie in einer Vierfeldertafel unter Angabe von absoluten Häufigkeiten. Betrachten Sie dabei folgende Ereignisse:
M: „Die befragte Person ist männlich.“
S: „Die befragte Person ist spielsüchtig.“

2.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

2.2.1 „Eine zufällig ausgewählte Person ist nicht spielsüchtig.“

2.2.2 „Eine zufällig ausgewählte Person ist eine spielsüchtige Frau.“

2.3 Eine zufällig ausgewählte Person ist spielsüchtig. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person eine Frau ist.

**3.** Obwohl der *Eurojackpot* mit einem hohen Hauptgewinn lockte, wurde er von den Lottospielern in den ersten Monaten eher gemieden. Lediglich etwa 8 von 100 Lottospielern spielten den *Eurojackpot.*
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass von 20 befragten Lottospielern

3.1 keine Person den *Eurojackpot* spielte,

3.2 genau zwei Personen den *Eurojackpot* spielten,

3.3 mindestens zwei Personen den *Eurojackpot* spielten.

# L ö s u n g e n

**1.1 Kombinationsmöglichkeiten für die beiden Ziehungen** **1,0 Punkte**

Ziehung A (Auswahl 5 aus 50): Anzahl der Möglichkeiten $\binom{50}{5} = 2\,118\,760$

Ziehung B (Auswahl 2 aus 8): Anzahl der Möglichkeiten $\binom{8}{2} = 28$

**1.2 Wahrscheinlichkeit für Gewinnklasse I** **2,0 Punkte**

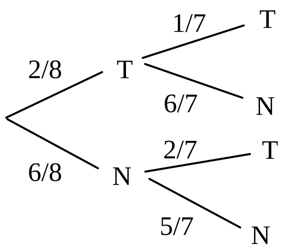
*A*: „Feld A richtig angekreuzt.“ *B*: „Feld B richtig angekreuzt.“

$P(A) = \frac{1}{2\,118\,760}$ $P(B) = \frac{1}{28}$

Da *A* und *B* unabhängig sind, gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{59\,325\,280}$

**1.3 Baumdiagramm und Wahrscheinlichkeit für keine Eurozahl** **3,0 Punkte**

Baumdiagramm:




*Bezeichnungen*:

T: Zahl von Herr Maier gezogen

N: Zahl von Herr Maier nicht gezogen

*P*(„kein Treffer“) = $P(\{(N,N)\}) = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28} \approx 0{,}5357$ (Pfad im Baumdiagramm)

**2.1 Vierfeldertafel** (mit absoluten Zahlen) **2,0 Punkte**

| | $M$ | $\overline{M}$ | Σ |
|---|---|---|---|
| $S$ | **10** | **3** | *13* |
| $\overline{S}$ | *2790* | *1197* | *3987* |
| Σ | **2800** | **1200** | **4000** |

**2.2 Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten**

2.2.1 **„Eine zufällig ausgewählte Person ist nicht spielsüchtig.“** **0,5 Punkte**

$P(\overline{S}) = \frac{3987}{4000} = 0{,}99675$ (Ablesen aus der Vierfeldertafel)

2.2.2 **„Eine zufällig ausgewählte Person ist eine spielsüchtige Frau.“** **1,0 Punkte**

Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit eines UND-Ereignisses:

$P(\overline{M} \cap S) = \frac{3}{4000} = 0{,}00075$

**2.3 „Wahrscheinlichkeit, dass eine spielsüchtige Person eine Frau ist** **1,5 Punkte**

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist: $\overline{M}$ (Frau)
Bedingung: S (Die betrachtete Person ist spielsüchtig.)

Damit ergibt sich:

$$P_S(\overline{M}) = P(\overline{M} \mid S) = \frac{P(\overline{M} \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{3}{4000}}{\frac{13}{4000}} = \frac{3}{13} \approx 0{,}2308$$

Alternative: Direktes Ablesen aus der Vierfeldertafel: $P_S(\overline{M}) = \frac{|\overline{M} \cap S|}{|S|} = \frac{3}{13}$

**3. *Eurojackpot***

Interpretation: Bernoulli-Kette der Länge $n = 20$
Treffer: „Spieler des Eurojackpots“ mit $p = 0{,}08$

**3.1 Keine Person spielt den *Eurojackpot*.** **1,0 Punkte**

$$P(T=0) = \binom{20}{0} \cdot 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^{20} \approx 0{,}1887$$

**3.2 Genau zwei Personen spielen den *Eurojackpot*.** **1,0 Punkte**

$$P(T=2) = \binom{20}{2} \cdot 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^{18} \approx 0{,}2711$$

**3.3 Mindestens zwei Personen spielen den *Eurojackpot*.** **2,0 Punkte**

$$P(T \geq 2) = 1 - P(T < 2) = 1 - P(T \leq 1) = 1 - (P(T=0) + P(T=1))$$

$$= 1 - \left(0{,}1887 + \binom{20}{1} \cdot 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^{19}\right)$$

$$\approx 1 - (0{,}1887 + 0{,}3282) = 0{,}4831$$

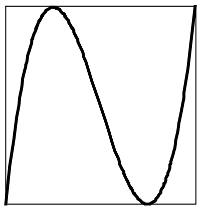
# Schriftliche Abiturprüfung 2013

## G-Kurs

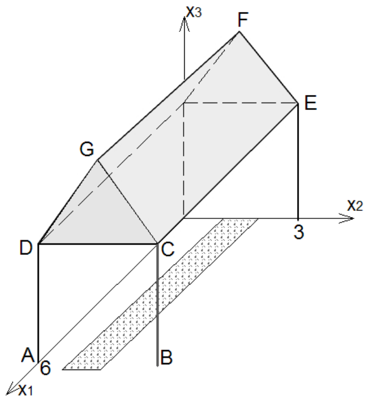
## Nachtermin

**Themenübersicht**

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Betrachtung einer ganzrationalen Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
  - Modellierung: Firmenlogos
  - Untersuchungen zur e-Funktion $f(x) = 20 + 60\,e^{-\frac{1}{20}x}$



- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Modellierung: Zelt für Staatsgast
  - Nachweis rechtwinkliges Dreieck
  - Projektion in Bodenebene




- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Wahrscheinlichkeitsmaß
  - Bernoulli-Kette
  - Erstellen und Auswerten eines Baumdiagramms

SOFTFRUTTI verlag
www.softfrutti.de

# Aufgabe 1
# ANALYSIS

**1.** Gegeben ist die Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x$ .

1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

1.2 Untersuchen Sie die Funktion auf Extrempunkte.

1.3 Geben Sie die Grenzwerte für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ an und skizzieren Sie mit Hilfe der bisher gefundenen Informationen den Graphen der Funktion *f*.

1.4 Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion *f* und zeigen Sie, dass der Wendepunkt auf der ersten Winkelhalbierenden liegt.

1.5 Textilfabrikantin Frau Nadel entwirft für ihre Firma ein neues Logo. Als Aufdruck wählt sie ein stilisiertes N (vgl. Abb.1). Dieses wird beschrieben durch obige Funktion

$$f: D \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x\ .$$

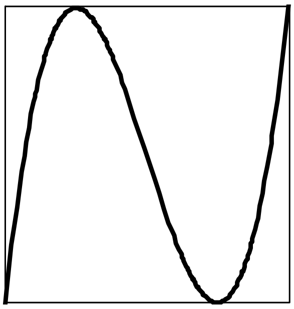


Abb. 1

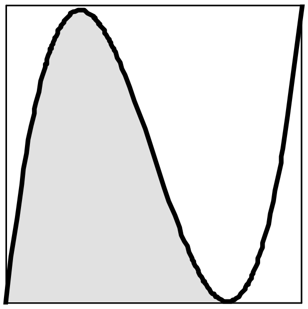


Abb. 2

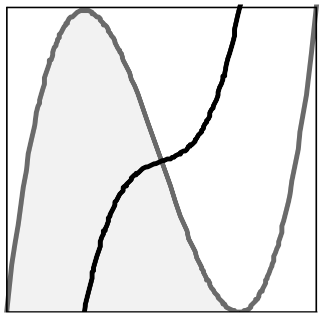


Abb. 3

1.5.1 Welche Maße muss ein quadratisches Firmenschild haben, damit dieses N wie in Abb. 1 darauf passt (1 Längeneinheit = 1 dm)?

1.5.2 Der dunkle Bereich unter dem N soll auf dem Schild farbig werden (vgl. Abb. 2). Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

1.5.3 Firmenpartner Herr Zwirn möchte seinen Namen auch im Logo vertreten sehen. Deshalb wird eine zusätzliche Linie (gedrehtes Z) eingefügt (vgl. Abb. 3). Diese wird beschrieben durch

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto \frac{5}{3}x^3 - 10x^2 + \frac{61}{3}x - 12\ .$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an den Graphen von *h* im Punkt $(2 \mid 2)$ .

**2.** Gegeben sind die Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto 20 + 60\,e^{-\frac{1}{20}x}$ .

2.1 Bestimmen Sie den Funktionswert an der Stelle $x = 30$.

2.2 Berechnen Sie die Steigung des Graphen der Funktion $f$ im Punkt $(30 \mid f\,(30))$.

2.3 Begründen Sie, dass die Funktion $f$ umkehrbar ist.

2.4 Bekannt ist die Umkehrfunktion der Funktion $f$. Sie lautet:

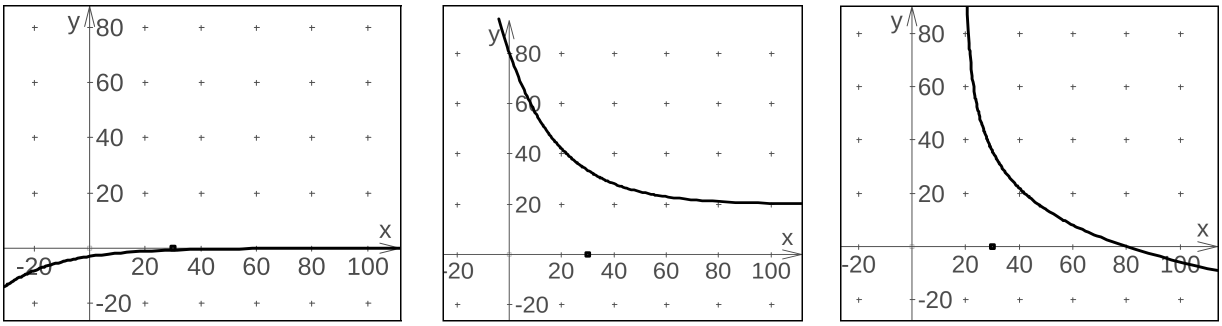
$$f^{-1}: D_{\max} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto -20\,\ln\left(\frac{1}{60}x - \frac{1}{3}\right) .$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von $f^{-1}$.

2.5 Untersuchen Sie die Funktion $f$ **und** deren Umkehrfunktion $f^{-1}$ (aus 2.4) auf Nullstellen.

2.6 Die folgenden Abbildungen zeigen die Graphen der Funktionen $f$, $f^{-1}$ und $f'$ in falscher Reihenfolge. Nutzen Sie Ihre Ergebnisse aus 2.1 bis 2.5 und ordnen Sie den Abbildungen die entsprechenden Funktionen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

① ② ③



# L ö s u n g e n

## 1. Untersuchung der ganzrationalen Funktion *f*

Betrachtet wird zunächst die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x$ .

### 1.1 Nullstellen **2,5 Punkte**

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \cdot (x-3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ (einfach)} \vee x = 3 \text{ (doppelt)} \end{aligned}$$

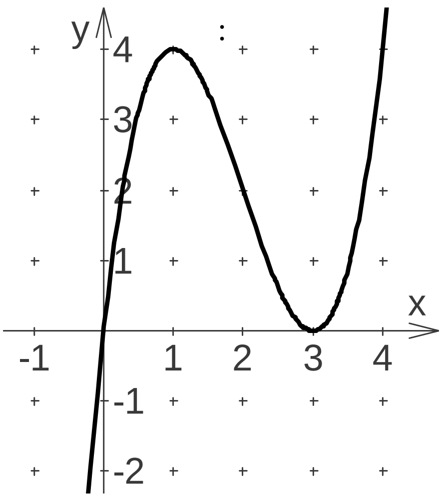
### 1.2 Extrempunkte **4,5 Punkte**

- Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3 \cdot (x^2 - 4x + 3) = 3 \cdot (x-1) \cdot (x-3)$
  $f''(x) = 6x - 12$
  $f'''(x) = 6$
- Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$
- Hinreichende Bedingung: $f''(1) = -6$ , also Maximumstelle. Mit $f(1) = 4$ folgt $H(1 \mid 4)$.
  $f''(3) = +6$ , also Minimumstelle. Mit $f(3) = 0$ folgt $T(3 \mid 0)$.

### 1.3 Grenzwerte und Graph **3,0 Punkte**

Grenzwerte: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Graph




### 1.4 Wendepunkt **3,0 Punkte**

- Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- Hinreichende Bedingung: $f'''(2) = 6 \neq 0$ , also Wendestelle.
- Angabe des Wendepunkts: Mit $f(2) = 2$ folgt $W(2 \mid 2)$.

Wegen $x_w = 2 = y_w$ liegt $W$ auf der ersten Winkelhalbierenden.

## 1.5 Firmenschild

### 1.5.1 Maße des Firmenschildes **1,0 Punkte**

Die Quadratseite ist 4 dm lang (vgl. Schaubild in 1.3).

### 1.5.2 Fläche **2,5 Punkte**

Gesucht ist das Maß der Fläche zwischen $G_f$ und der $x$-Achse über dem Intervall [0 ; 3].

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^3 = \left(\frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2}\right) - 0 = 6\frac{3}{4}$$

Die Fläche ist 6,75 $dm^2$ groß.

### 1.5.3 Tangentengleichung **2,5 Punkte**

Betrachtet wird die Funktion $h$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $x \mapsto \frac{5}{3}x^3 - 10x^2 + \frac{61}{3}x - 12$ .

Ansatz für die Gleichung der Tangente an der Stelle 2 gilt: $y = h'(2) \cdot (x - 2) + h(2)$

- Ableitung: $h'(x) = 5x^2 - 20x + \frac{61}{3}$
- Steigung an der Stelle 2: $h'(2) = 5 \cdot 4 - 20 \cdot 2 + \frac{61}{3} = \frac{1}{3}$
- Funktionswert: $h(2) = 2$ ( gemäß Vorgabe Punkt (2 | 2) )

Damit ergibt sich die Tangentengleichung: $y = \frac{1}{3} \cdot (x - 2) + 2 = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{4}{3}$

## 2. Untersuchung der Exponentialfunktion *f*

Betrachtet wird die Funktionen $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $x \mapsto 20 + 60\,e^{-\frac{1}{20}x}$ .

### 2.1 Funktionswert an der Stelle 30 **0,5 Punkte**

$f(30) = 20 + 60\,e^{-\frac{1}{20}\cdot 30} \approx 33{,}39$

### 2.2 Steigung des Graphen an der Stelle 30 **1,5 Punkte**

Ableitung: $f'(x) = 60\,e^{-\frac{1}{20}x} \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) = -3\,e^{-\frac{1}{20}x}$

Steigungswert: $f'(30) = -3\,e^{-\frac{1}{20}\cdot 30} \approx -0{,}67$

### 2.3 Umkehrbarkeit **1,5 Punkte**

Es gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ . Dies bedeutet, dass $f$ streng monoton fallend und damit auch umkehrbar ist.

### 2.4 Maximale Definitionsmenge von $f^{-1}$ **2,5 Punkte**

Angegeben ist: $f^{-1}(x) = -20 \ln\left(\frac{1}{60}x - \frac{1}{3}\right)$ .

Bedingung für den ln-Term: $\frac{1}{60}x - \frac{1}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{60}x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > 20$

Somit: $D_{max} = ]20 ; +\infty[$

### 2.5 Nullstellen von *f* und $f^{-1}$ **2,5 Punkte**

- von $f$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 20 + 60\,e^{-\frac{1}{20}x} = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{20}x} = -\frac{1}{3}$ (unerfüllbar)

  Die Funktion $f$ hat keine Nullstellen.
- von $f^{-1}$: $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow -20\ \ln(\frac{1}{60}x - \frac{1}{3}) \Leftrightarrow \frac{1}{60}x - \frac{1}{3} = 1$

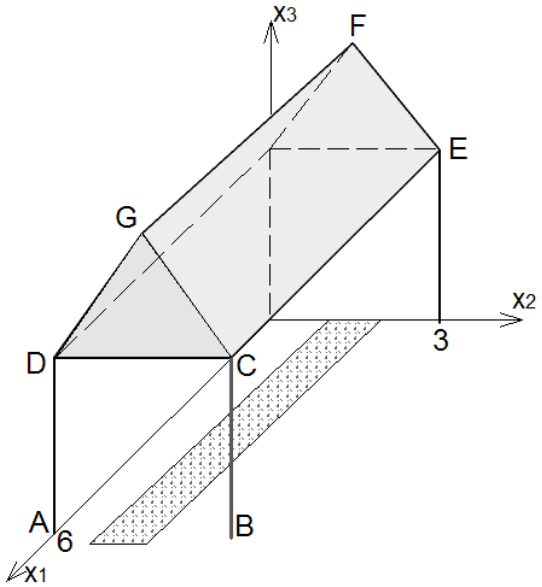
  $\Leftrightarrow \frac{1}{60}x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 80$

### 2.6 Zuordnung der Graphen **2,5 Punkte**

- Bild 1 zeigt den Graphen von $f'$, da die Ableitungsfunktion nur negative Funktionswerte annimmt.
- Bild 2 zeigt den Graphen von *f*, da *f* nur positive Funktionswerte annimmt.
- Bild 3 zeigt den Graphen von $f^{-1}$, da $f^{-1}$ bei 80 eine Nullstelle hat.

# Aufgabe 2
# ANALYTISCHE GEOMETRIE

In einem fernen Land empfängt ein Herrscher vor seinem Palast einen Staatsgast. Ihm zu Ehren wird ein roter Teppich ausgelegt. Darüber wird als Regenschutz ein Zelt errichtet. Das Zelt besteht aus vier 3 Meter hohen Pfosten und zwei dreieckigen Giebelseiten mit den Spitzen $G(6 \mid 1{,}5 \mid 5)$ und $F(0 \mid 1{,}5 \mid 5)$. Das Zelt ist 6 Meter lang, 3 Meter breit und 5 Meter hoch.
(1 Längeneinheit = 1 Meter)




**1.** Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte *B*, *D* und *E* an.

**2.** Die linke Teppichkante (vgl. Abb.) wird beschrieben durch

$$g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -0,25 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass der 1 Meter breite Teppich nicht mittig unter dem Zelt liegt.

**3.** An jeden Pfosten wird in zwei Meter Höhe eine Lampe fixiert. Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der diese Lampen befestigt sind.

**4.** Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $e_D$ in der die Dachfläche *CEFG* liegt. [ Zur Kontrolle: $e_D$: $4x_2 + 3x_3 = 21$ ]

**5.** Zeigen Sie: Das Giebeldreieck *DCG* ist nicht rechtwinklig.

**6.** Im Diagonalenschnittpunkt der Dachfläche *CEFG* ist die Abdeckplane beschädigt. Regenwasser tropft senkrecht auf den Boden. Landen die Tropfen auf dem Teppich? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung.

**7.** Auf der Palastterrasse steht ein Kameramann. Er hat seine Kamera im Punkt $(10 \mid 8 \mid 7)$ in Richtung $\vec{n} = \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}$ ausgerichtet.

Berechnen Sie, in welchem Punkt auf dem Vorplatz die Staatskarosse halten soll, damit der Kameramann das Aussteigen des Gastes gut aufnehmen kann.

# L ö s u n g e n

**1. Koordinaten der Eckpunkte** **1,5 Punkte**

Punkte $B(6 \mid 3 \mid 0)$ , $D(6 \mid 0 \mid 3)$ , $E(0 \mid 3 \mid 3)$ (folgt aus den gegebenen Längenangaben)

**2. Teppich nicht mittig unter dem Zelt** **1,0 Punkte**

Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -0{,}25 \\ 0 \end{pmatrix}$ von $g$ ist nicht kollinear zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Richtung $x_1$-Achse).

Die Teppichkante ist nicht parallel zur $x_1$-Achse. Der Teppich kann nicht mittig liegen.

<u>Alternative</u>: vordere Teppichmitte $M_T(6 \mid 1{,}25 \mid 0) \neq$ vordere Zeltmitte $M_Z(6 \mid 1{,}5 \mid 0)$

**3. Gleichung der Ebene, in der die Lampen befestigt sind** **1,0 Punkte**

Bei der gesuchten Ebene handelt es sich um eine Ebene parallel zur $x_1$-$x_2$-Ebene (Gleichung $x_3 = 0$) im Abstand 2.

Sie hat daher die Koordinatengleichung $x_3 = 2$.

<u>Alternative</u>: Parametergleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**4. Koordinatengleichung, in der die Dachfläche *CEFG* liegt** **3,5 Punkte**

Aufpunkt der gesuchten Ebene: $F(0 \mid 1{,}5 \mid 5)$

– Richtungsvektoren: $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$

– Normalenvektor: $\overrightarrow{FG} \times \overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Punktnormalengleichung: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = 0$
- Allgemeine Normalengleichung: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 21 = 0$
- Koordinatengleichung: $e_D : 4x_2 + 3x_3 = 21$

**5. Giebeldreieck nicht rechtwinklig** **2,5 Punkte**

Das Dreieck $\Delta DCG$ ist gleichschenklig mit der Basis $\overline{DC}$ . Als rechter Winkel kommt daher nur der Winkel $\sphericalangle DGC$ in Frage.

Mit $C(6 \mid 3 \mid 3)$ erhält man für die Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{GD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{GC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich: $\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{GC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 - 2{,}25 + 4 = 1{,}75 \neq 0$ .

Das Dreieck $\Delta DCG$ ist also nicht rechtwinklig.

**6. Tropfen auf dem Teppich** **2,5 Punkte**

Mittelpunkt der Strecke $\overline{CF}$ :

$$\vec{m}_{CF} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{c} + \vec{f}\,) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}25 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Projektion in $x_1$-$x_2$-Ebene ergibt den Punkt: $(3 \mid 2{,}25 \mid 0)$

Die Tropfen landen (rechts) neben dem Teppich, da für die $x_2$-Koordinate gilt $2{,}25 > 2$.

**7. Haltepunkt der Staatskarosse** **3,0 Punkte**

Gesucht ist der Schnittpunkt (Spurpunkt) von

$$g_K : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}$$ und der $x_1$-$x_2$-Ebene mit der Gleichung $x_3 = 0$.

Aus $x_3 = 0$ folgt: $7 - 7\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Das Auto sollte in $A(-4 \mid 2 \mid 0)$ halten.

# Aufgabe 3
# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

**1.** In einer Urne befinden sich schwarze, rote, blaue und grüne Kugeln. Es wird zufällig eine Kugel gezogen und deren Farbe festgestellt. Dadurch ergeben sich folgende Ereignisse:

S: Es wird eine schwarze Kugel gezogen. R: Es wird eine rote Kugel gezogen.

B: Es wird eine blaue Kugel gezogen. G: Es wird eine grüne Kugel gezogen.

1.1 Überprüfen Sie, ob es sich bei der im Folgenden dargestellten Funktion um ein Wahrscheinlichkeitsmaß für obiges Zufallsexperiment handeln könnte. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Falls es sich um ein Wahrscheinlichkeitsmaß handelt, geben Sie an, wie viele Kugeln sich von jeder Farbe in der Urne befinden könnten.

| $\{\omega\}$ | S | R | B | G |
|---|---|---|---|---|
| $P(\{\omega\})$ | 0,4 | $\frac{1}{3}$ | 0,125 | $\frac{17}{120}$ |

1.2 Das Abzählen von Kugeln in einer Urne ergab folgende Situation: In der Urne lagen doppelt so viele schwarze wie rote, doppelt so viele rote wie blaue und doppelt so viele blaue wie grüne Kugeln. Geben Sie für diese Situation in einer Tabelle ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß an.

**2.** Bei der Kaninchenzucht von Englischen Schecken kommen über lange Zeit gesehen reinweiße Schecken, Typenschecken (weiße Kaninchen mit schwarzer Punktkette) und schwarze Schecken im Verhältnis 1 : 2 : 1 vor.

2.1 Bauer Albert liefert die nächsten 30 Nachkommen seiner Scheckenzucht an eine Tierhandlung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt genau die Hälfte das typische Punktmuster?

2.2 Schwarze Schecken lassen sich schlecht verkaufen. Wie sicher kann ein Züchter sein, dass er bei 10 Geburten höchstens eine schwarze Schecke bekommt?

2.3 Bei Züchter Lampe ergab sich bei seinen 24 Jungtieren zufällig genau das in 2. beschriebene Verhältnis 1 : 2 : 1. Er will zwei Kaninchen verkaufen und greift dazu nacheinander zweimal in den Kaninchenstall, nimmt zufällig eines heraus und sperrt es in die Transportbox. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind zwei reinweiße Kaninchen in der Box?

**3.** Smartphones sind immer mehr im Kommen und werden von verschiedenen Firmen hergestellt. Ein Gerät der Marke X wurde weltweit im Jahre 2012 von 12% aller Smartphonekäufer erworben. Die Geräte der Marke X gibt es entweder mit dem Betriebssystem Android oder mit einem anderen Betriebssystem.

68% aller Smartphonekäufer haben sich für das Betriebssystem Android entschieden. Von denjenigen, die **kein** Android ausgewählt haben, entschieden sich 30% **für** die Marke X.

3.1 Zeichnen Sie zu oben genanntem Sachverhalt ein geeignetes Baumdiagramm und beschriften Sie die Äste soweit wie möglich mit Wahrscheinlichkeiten, die man aus dem Text entnehmen kann.

3.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit wählt einer der oben genannten Käufer weder das Betriebssystem Android noch die Marke X?

3.3 Berechnen Sie, wie viel Prozent aller Smartphonekäufer sowohl Android als auch die Marke X wählen. Beachten Sie dabei, dass 12% aller Käufer sich für die Marke X entscheiden.

3.4 Ein zufällig herausgegriffener Smartphonebesitzer bedient gerade sein neu erworbenes Smartphone der Marke X. Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet dieses mit Android?

# L ö s u n g e n

## 1. Urne mit schwarzen, roten, blauen und grünen Kugeln

### 1.1 Prüfen auf Wahrscheinlichkeitsmaß — **3,0 Punkte**

Alle Wahrscheinlichkeiten sind nichtnegativ.
Für die Summe der in der Tabelle gegebenen Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$\Sigma\, P(\{\omega\}) = 0{,}4 + \frac{1}{3} + 0{,}125 + \frac{17}{120} = \frac{48}{120} + \frac{40}{120} + \frac{15}{120} + \frac{17}{120} = 1$$

Die Funktion ist somit ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Es können sich 48 schwarze, 40 rote, 15 blaue und 17 grüne Kugeln in der Urne befinden (*oder Vielfache davon*).

### 1.2 Angabe eines Wahrscheinlichkeitsmaßes — **2,0 Punkte**

Gemäß der Aufgabestellung gilt: $s = 2r$ , $r = 2b$ und $b = 2g$ .
Mögliche Anzahlen: 1 grün, 2 blau, 4 rot und 8 schwarz (insgesamt 15)

W-Maß:

| $\{\omega\}$ | $s$ | $r$ | $b$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(\{\omega\})$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

## 2. Kaninchenzucht von Englischen Schecken

Es gilt: $P$(weiße Schecken) = 0,25
$P$ (Typenschecken) = 0,5
$P$(schwarze Schecken) = 0,25

### 2.1 Hälfte der Schecken mit typischem Punktmuster — **1,5 Punkte**

Interpretation:
Bernoullikette der Länge $n = 30$
Treffer: „Typenschecken“ $p = 0{,}5$

Es gilt:

$$P(T = 15) = \binom{30}{15} \cdot 0{,}5^{15} \cdot 0{,}5^{15} \approx 0{,}1445$$

### 2.2 Bei 10 Geburten höchstens eine schwarze Schecke — **2,0 Punkte**

Interpretation:
Bernoullikette der Länge $n = 10$
Treffer: schwarze Schecke mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}25$

Es gilt:

$$P(T \le 1) = P(T = 0) + P(T = 1) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^9$$

$$\approx 0{,}0563 + 0{,}1877 = 0{,}2440$$

Nur mit knapp 25% kann er sicher sein, höchstens eine schwarze Schecke zu bekommen.

**2.3 Zwei reinweiße Kaninchen in der Box** **1,5 Punkte**

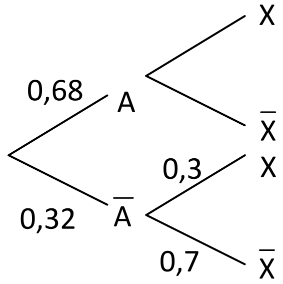
Bei 24 Schecken in dem angegebenen Verhältnis 1 : 2 : 1 befinden sich 6 reinweiße Schecken, 12 Typenschecken und 6 schwarze Schecken in der Box.

$$P(\text{„genau 2 weiße“}) = \underset{\text{Ziehung 1}}{\underset{\uparrow}{\frac{6}{24}}} \cdot \underset{\text{Ziehung 2}}{\underset{\uparrow}{\frac{5}{23}}} \approx 0{,}0543$$

**3. Smartphones**

**3.1 Baumdiagramm** **1,5 Punkte**

A: Smartphone nutzt Android X: Smartphone der Marke X




**3.2 Weder das Betriebssystem Android noch die Marke X** **1,0 Punkte**

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit eines UND-Ereignisses:

$P(\overline{A} \cap \overline{X}) = 0{,}32 \cdot 0{,}7 = 0{,}224$ (Pfad im Baumdiagramm)

**3.3 Sowohl Android als auch die Marke X** **1,5 Punkte**

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit eines UND-Ereignisses $P(A \cap X)$.

Unter Verwendung von $P(X) = 0{,}12$ und des (unvollständigen) Baumdiagramm folgt:

$$\begin{aligned} P(X) = 0{,}12 &\Leftrightarrow P(A \cap X) + P(\overline{A} \cap X) = 0{,}12 \\ &\Leftrightarrow P(A \cap X) + 0{,}32 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 \\ &\Leftrightarrow P(A \cap X) + 0{,}096 = 0{,}12 \\ &\Leftrightarrow P(A \cap X) = 0{,}024 \end{aligned}$$

**3.4 Wahrscheinlichkeit für Arbeiten mit Android** **1,0 Punkte**

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist: A (Arbeiten mit Android)
Bedingung: X (Smartphone der Marke X.)

Damit ergibt sich:

$$P_X(A) = \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = \frac{0{,}024}{0{,}12} = 0{,}2$$

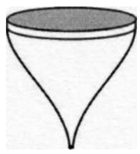
# Schriftliche Abiturprüfung 2014

## E-Kurs

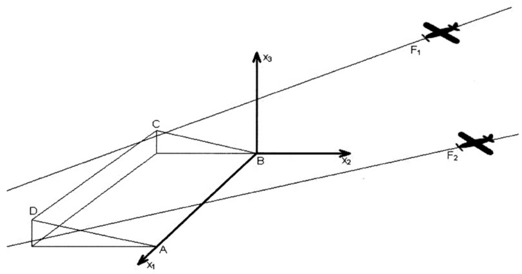
## Haupttermin

**Themenübersicht**

- Aufgabe 1: **Analysis**
  – Untersuchung der ganzrationalen Funktion $f(x) = -\frac{1}{250}x^4 + \frac{1}{5}x^2$
  – Rotationsvolumen: Glasgefäß
  – Untersuchung der Funktionenschar $f_a(x) = \frac{e^x}{a \cdot x + 1}$
  – Untersuchung der Funktionenschar $h_k(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - k}$



- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  – Abstand Punkt-Ebene
  – Schnittpunkt zweier Geraden
  – Schnitt einer Ebene mit einer Geraden
  – Kollisionskurs von Flugzeugen



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  – Kombinatorik
  – Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel
  – Baumdiagramm und Bernoulli-Kette
  – Erwartungswert und Standardabweichung bei Binomialverteilung

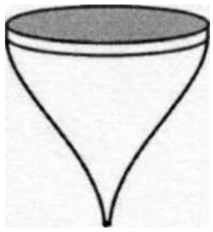
# Aufgabe 1
# ANALYSIS

**1.** Gegeben ist die Funktion $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\frac{1}{250}x^4 + \frac{1}{5}x^2$.

1.1 Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie und Nullstellen.
Bestimmen Sie die Extrempunkte des Graphen.

1.2 Zeichnen Sie unter Berücksichtigung der Ergebnisse von Teil 1.1 den Graphen von *f*.

1.3 Das rechts dargestellte Glasgefäß ist im Original 5 cm hoch, der Radius der oberen kreisförmigen Öffnung beträgt 2,5 cm. Das untere verschlossene Ende läuft spitz zu. Das Gefäß kann zum Abmessen kleiner Flüssigkeitsmengen verwendet werden. Zur Berechnung des Füllvolumens wird das Gefäß als Rotationskörper zu einer Randfunktion angesehen.



Die Funktion *f* stellt bei Einschränkung der Definitionsmenge auf das Intervall [0 ; 5] eine geeignete Randfunktion dar. Begründen Sie dies anhand ihrer Eigenschaften.

1.4 Berechnen Sie unter Angabe eines Integralansatzes und einer Stammfunktion das Füllvolumen des Gefäßes (in $cm^3$, gerundet auf zwei Nachkommastellen).

1.5 Um Markierungen zum Ablesen des Volumens anzubringen, wird die Füllkurve ermittelt. Dazu füllt man gleichmäßig Wasser ein und bestimmt für wachsende Zeiten *t* die Füllhöhe *h*.

Begründen Sie kurz, dass die Punkte der Füllkurve nicht auf einer Geraden liegt.

Skizzieren Sie ohne weitere Rechnung in einem geeigneten Koordinatensystem qualitativ einen Graphen, der grundsätzlich die Füllkurve darstellen könnte. Erläutern Sie den Verlauf des Graphen kurz im Sachzusammenhang.

**2.** Gegeben ist eine Funktionenschar $f_a$ durch

$$f_a:\ D_{\max} \to \mathbb{R} \text{ mit } f_a(x) = \frac{e^x}{a \cdot x + 1} \text{ mit } a \in \mathbb{R}^+ .$$

2.1 Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter *a* die Definitionsmenge $D_{\max}$.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte bei Annäherung der *x*-Werte an die Definitionslücke.

2.2 Geben Sie mit Begründung die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)$ an.

2.3 Untersuchen Sie $f_a$ auf Nullstellen und auf Symmetrie.

2.4 Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung gilt: $f_a'(x) = \dfrac{e^x \cdot (ax - a + 1)}{(a \cdot x + 1)^2}$

2.5 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a$ den Punkt, in dem der Graph von $f_a$ eine waagerechte Tangente besitzt.

Zeigen Sie (z.B. mithilfe der Teilaufgaben 2.1 und 2.2), dass es sich bei diesem Punkt um einen Tiefpunkt handelt.

Ermitteln Sie die Gleichung der Kurve, auf der alle Tiefpunkte der Schar liegen.

2.6 Bestimmen Sie den Wert des Parameters $a$ so, dass der Tiefpunkt die $x$-Koordinate 0 hat.

2.7 Geben Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse die Definitionslücke der Funktion $f_1$ und die Koordinaten des Tiefpunktes von $f_1$ an.

Zeichnen Sie den Graphen von $f_1$.

**3.** Gegeben ist eine Funktionenschar $h_k$ durch

$$h_k(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - k} \text{ mit } k \in \mathbb{R} .$$

3.1 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D_{\max}$ in Abhängigkeit von $k$.

3.2 Bestimmen Sie die beiden Werte von $k$, für die die Scharfunktion $h_k$ genau eine Nullstelle hat.

3.3 Im Folgenden sei $k = 9$.

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an und vereinfachen Sie den Funktionsterm der zugehörigen Funktion so weit wie möglich.

Untersuchen Sie die Funktion auf die Existenz von Polstellen und bestimmen Sie ggf. das Verhalten der Funktion bei Annäherung der $x$-Werte an diese Stellen.

Ermitteln Sie die Asymptote der Funktion.

Zeichnen Sie den Graphen.

3.4 Berechnen Sie das Maß der Fläche zwischen dem Graphen von $h_9$ und der Asymptote im Intervall [0 ; 2] unter Angabe einer Stammfunktion.

# L ö s u n g e n

## 1. Betrachtung einer ganzrationalen Funktion

Gegeben ist die Funktion $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\frac{1}{250}x^4 + \frac{1}{5}x^2$ .

### 1.1 Untersuchung auf Symmetrie und Nullstellen sowie Extrempunkte **8,5 Punkte**

- *Symmetrie* (1,5 P)

  $f$ ist als ganzrationale Funktion mit nur geraden Exponenten achsensymmetrisch.

  <u>Alternative</u>: Begründung mithilfe der Definition der Symmetrie
  $D$ ist symmetrisch und für alle $x \in D$ gilt:
  $$f(-x) = -\frac{1}{250}(-x)^4 + \frac{1}{5}(-x)^2 = -\frac{1}{250}x^4 + \frac{1}{5}x^2 = f(x)$$

- *Nullstellen* (2,0 P)

  $$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{250}x^4 + \frac{1}{5}x^2 = 0$$
  $$\Leftrightarrow\; x^4 - 50x^2 = 0$$
  $$\Leftrightarrow\; x^2 \cdot (x^2 - 50) = 0$$
  $$\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = -\sqrt{50} \;\vee\; x = \sqrt{50}$$

- *Extrempunkte* (4,0 P)

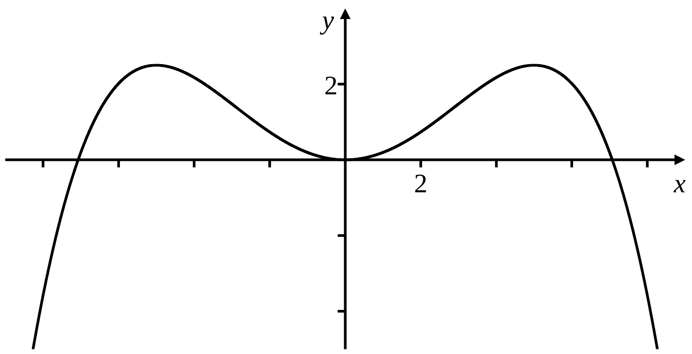
  - Ableitung: $f'(x) = -\frac{2}{125}x^3 + \frac{2}{5}x = -\frac{2}{125}x \cdot (x^2 - 25) = -\frac{2}{125}x \cdot (x+5) \cdot (x-5)$
  - Notwendige Bedingung:
    $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; x = -5 \;\vee\; x = 5$ (alle mit Vzw.)
  - Hinreichende Bedingung:
    Vorzeichentabelle:

| $x$ | | $-5$ | | $0$ | $1$ | $5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + | 0 | – |
| | | mit HP | | mit TP | | mit HP | |

    Testwert: $f'(1) = \frac{48}{125} > 0$

  - Funktionswerte:
    $f(0) = 0$ ; $f(-5) = f(5) = 2{,}5$
  - Extrempunkte:
    $H(-5 \mid 2{,}5)$ ; $T(0 \mid 0)$ ; $H(5 \mid 2{,}5)$

### 1.2 Graph der Funktion *f* **2,0 Punkte**



**1.3 Begründung, dass *f* eine geeignete Randfunktion ist** **2,0 Punkte**

Die Funktion *f* erfüllt folgende Bedingungen:

- Die Höhe von 5 cm entspricht der Länge des Intervalls.
- Der Radius von 2,5 cm entspricht der *y*-Koordinate der Randextrempunkte von *f*.
- Das Monotonieverhalten entspricht der Form des Gefäßes.
- $P(0 \mid 0)$ entspricht der Spitze.

**1.4 Füllvolumen des Gefäßes** **4,0 Punkte**

$$V = \pi \cdot \int_0^5 f^2(x)\,dx = \pi \cdot \int_0^5 \left(-\frac{1}{250}x^4 + \frac{1}{5}x^2\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^5 \left(\frac{1}{62250}x^8 - \frac{1}{625}x^6 + \frac{1}{25}x^4\right) dx$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{562500}x^9 - \frac{1}{4375}x^7 + \frac{1}{125}x^5\right]_0^5 \approx 33{,}3$$

Das Volumen beträgt etwa 33,3 cm$^3$.

**1.5 Füllkurve** **2,5 Punkte**

Eine geradlinige Füllkurve ergäbe sich bei gleichmäßigem Einfüllen nur bei einem Gefäß mit gleich großen Querschnittsflächen, z.B. Zylinder oder Prisma.
Die Füllhöhe steigt zunächst steil an und wird mit zunehmender Verbreiterung des Gefäßes immer flacher.

In einem Koordinatensystem, in dem auf der *x*-Achse die Zeit (in s) und auf der *y*-Achse die Höhe (in cm) abgetragen wird, ist ein Graph entsprechend dem Graphen einer Wurzelfunktion zu zeichnen.

**2. Betrachtung einer Funktionenschar mit e-Funktionsterm**

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $f_a(x) = \frac{e^x}{a \cdot x + 1}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ .

**2.1 Definitionsmenge und Annäherung an Definitionslücke** **3,0 Punkte**

- *Definitionsmenge* (1,5 P)

  Eine Definitionslücke kann nur als Nullstelle des Nennerpolynoms auftreten:

  $a \cdot x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{a}$ (Wegen der Vorausssetzung $a > 0$ gilt insbesondere auch $a \neq 0$. Der Term $-\frac{1}{a}$ ist also stets definiert.)

  Daher gilt: $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{a}\}$ .

- *Annäherung an die Definitionslücke* (1,5 P)

  Es gilt: $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{a}^-} f_a(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{a}^-} \frac{e^x}{a \cdot x + 1} = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{a}^+} f_a(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{a}^+} \frac{e^x}{a \cdot x + 1} = +\infty$ .

  (An der Stelle $-\frac{1}{a}$ liegt ein Vorzeichenwechsel von – nach + vor, denn der Zähler ist immer positiv und die lineare Funktion im Nenner ist wegen $a > 0$ streng monoton wachsend.)

  Alternative: Bei der Definitionslücke $-\frac{1}{a}$ handelt es sich um eine Polstelle mit Vzw.

  Als Grenzwerte kommen daher nur $-\infty$ oder $+\infty$ in Frage. Eine Entscheidung lässt sich mit einer Vorzeichentabelle treffen.

| $x$ | | | $-1/a$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_a(x)$ | $-$ | $\downarrow$<br>$-\infty$ | \|<br>Pol | $\uparrow$<br>$+\infty$ | $+$ |

Testwert: $f_a(1) = \frac{e}{a+1} > 0$

**2.2 Grenzwerte für $x \to \pm\infty$** **2,0 Punkte**

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} (\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0^+}}{\frac{1}{a\cdot x+1}}) = +\infty \quad ; \qquad \lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} (\underset{\substack{\downarrow \\ 0^+}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0^-}}{\frac{1}{a\cdot x+1}}) = 0^-$$

(Der e-Funktionsterm dominiert.)

**2.3 Nullstellen und Symmetrie** **1,0 Punkte**

- *Nullstellen*
  Der Zählerterm $e^x$ ist stets positiv, es gibt daher keine Nullstellen.
- *Symmetrie*
  Die Definitionsmenge ist jedes $a > 0$ unsymmetrisch (genau eine Definitionslücke $-\frac{1}{a}$ ungleich null). Daher besitzt der Graph von $f_a$ keine einfache Symmetrie.

**2.4 Ableitung** **1,5 Punkte**

Es gilt: $f_a'(x) = \frac{(a\cdot x+1)\cdot e^x - e^x\cdot a}{(a\cdot x+1)^2} = \frac{e^x\cdot(a\cdot x-a+1)}{(a\cdot x+1)^2}$

**2.5 Punkt mit waagerechter Tangente, Nachweis Tiefpunkt und Gleichung Ortskurve** **4,5 Punkte**

- *Waagerechte Tangente*: (notwendige Bedingung für einen Extrempunkt) (1,0 P)
  Es gilt: $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow a\cdot x - a + 1 = 0 \Leftrightarrow a\cdot x = a-1 \Leftrightarrow x = \frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a} + 1$
  An der Stelle $-\frac{1}{a} + 1$ liegt somit eine waagerechte Tangente vor.
- *Nachweis Tiefpunkt*: (hinreichende Bedingung) (1,0 P)
  1. Möglichkeit: Verbale Begründung

  Wegen des streng monotonen Wachsens des linearen Terms im Zähler von $f_a'(x)$ und der Positivität der anderen Terme liegt ein Vorzeichenwechsel von – nach + vor.
  Daher handelt es sich bei $-\frac{1}{a} + 1$ um eine lokale Minimumstelle.

  2. Möglichkeit: Begründung mit Vorzeichentabelle

| $x$ | $-\frac{2}{a}$ | $-\frac{1}{a}$ | | $-\frac{1}{a}+1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_a'(x)$ | – | \| | – | 0 | + |
| | | ohne | | mit | |

Testwert:

$$f_a'(-\tfrac{2}{a}) = \frac{e^{-\frac{2}{a}}\cdot(a\cdot\frac{-2}{a} - a + 1)}{(a\cdot\frac{-2}{a}+1)^2} = e^{-\frac{2}{a}}\cdot(-1-a) < 0$$

  Es liegt ein Vorzeichenwechsel von – nach + vor.
  Daher handelt es sich bei $-\frac{1}{a} + 1$ um eine lokale Minimumstelle.

  3. Möglichkeit: Graphische Begründung

  $-\frac{1}{a} + 1 = \frac{a-1}{a}$ ist (die einzige) Stelle mit waagerechter Tangente.
  Sie liegt stets rechts von der Definitionslücke $-\frac{1}{a}$ (Polstelle).
  Wegen $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{a}^+} f_a(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$ muss es sich bei der Stelle mit waagerechter Tangente um eine lokale Minimumstelle handeln.

- *Angabe des Extrempunkts* (1,0 P)

  Funktionswert: $f_a(\frac{a-1}{a}) = \dfrac{e^{\frac{a-1}{a}}}{a\cdot\frac{a-1}{a}+1} = \dfrac{e^{\frac{a-1}{a}}}{a} = \frac{1}{a}\cdot e^{\frac{a-1}{a}}$ ; Tiefpunkt: $T(\frac{a-1}{a} \mid \frac{1}{a}\cdot e^{\frac{a-1}{a}})$

- *Ortskurve* (1,5 P)

  Es gilt: $x = \frac{a-1}{a} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = 1 - x.$

  Einsetzen von $\frac{1}{a} = 1 - x$ und $\frac{a-1}{a} = x$ in $y$-Koordinate von $T$ liefert eine Gleichung der gesuchten Ortskurve:

  $$y = (1-x)\cdot e^x$$

  Alternative: Es gilt: $x = \frac{a-1}{a} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = 1 - x \Leftrightarrow a = \frac{1}{1-x}$.

  Einsetzen in die Funktionsgleichung $f_a(x) = \frac{e^x}{a\cdot x+1}$ ergibt:

  $$y = \frac{e^x}{\frac{1}{1-x}\cdot x+1} = \frac{e^x}{\frac{x}{1-x}+1} = \frac{e^x}{\frac{x+(1-x)}{1-x}} = \frac{e^x}{\frac{1}{1-x}} = (1-x)\cdot e^x$$

## 2.6 Bestimmung eines Parameterwertes **1,0 Punkte**

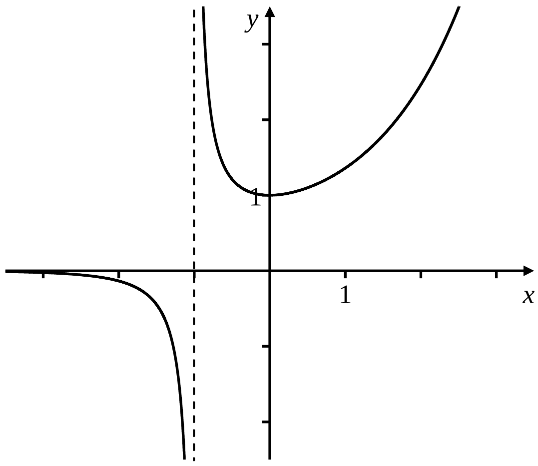
Die $x$-Koordinate des Tiefpunkts soll 0 sein: $x_T = 0 \Leftrightarrow \frac{a-1}{a} = 0 \Leftrightarrow a = 1$

## 2.7 Graph von $f_1$ **3,0 Punkte**

Es gilt: $f_1(x) = \frac{e^x}{x+1}$ .

Polstelle: −1

Tiefpunkt: $T(0 \mid 1)$




## 3. Betrachtung einer gebrochenrationalen Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $h_k : D_{max} \to \mathbb{R}$ mit $h_k(x) = \frac{x^2-2x-15}{x^2-k}$ mit $k \in \mathbb{R}$ .

## 3.1 Definitionsmenge in Abhängigkeit von $k$ **3,0 Punkte**

Definitionslücken können nur als Nullstellen des Nennerpolynoms auftreten:

$$x^2 - k = 0 \Leftrightarrow x^2 = k \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{k} \vee x = \sqrt{k} & \text{, falls } k > 0 \\ x = 0 & \text{, falls } k = 0 \\ \text{unerfüllbar} & \text{, falls } k < 0 \end{cases}$$

Damit folgt:
$$\begin{cases} D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{k}, \sqrt{k}\} & \text{, falls } k > 0 \\ D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{, falls } k = 0 \\ D_{max} = \mathbb{R} & \text{, falls } k < 0 \end{cases}$$

## 3.2 Werte von *k* mit genau einer Nullstelle **2,5 Punkte**

Faktorisierung des Funktionsterms: $h_k(x) = \dfrac{x^2-2x-15}{x^2-k} = \dfrac{(x+3)(x-5)}{x^2-k}$ .

Das Zählerpolynom besitzt die einfachen Nullstellen −3 und 5.

Es gibt genau eine Nullstelle wenn sich der Linearfaktor ($x$ + 3) oder ($x$ – 5) kürzen lässt. Dies ist für $k$ = 9 oder $k$ = 25 der Fall, denn für diese Werte gilt:

- $h_9(x) = \dfrac{(x+3)(x-5)}{x^2-9} = \dfrac{(x+3)(x-5)}{(x+3)(x-3)} \underset{D_{\max}}{=} \dfrac{x-5}{x-3}$
- $h_{25}(x) = \dfrac{(x+3)(x-5)}{x^2-25} = \dfrac{(x+3)(x-5)}{(x+5)(x-5)} \underset{D_{\max}}{=} \dfrac{x+3}{x+5}$

## 3.3 Untersuchung der Funktion $h_9$ **7,0 Punkte**

- *Definitionsmenge* (0,5 P)

  Nach 3.1 gilt: $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;\,3\}$ .

*Polstelle* (2,0 P)

Nach 3.2 gilt: $h_9(x) = \dfrac{(x+3)(x-5)}{x^2-9} \underset{D_{\max}}{=} \dfrac{x-5}{x-3}$ .

Die Stelle 3 ist Polstelle, da sie in der gekürzten Darstellung Nullstelle des Nennerpolynoms, nicht aber des Zählerpolynoms ist.

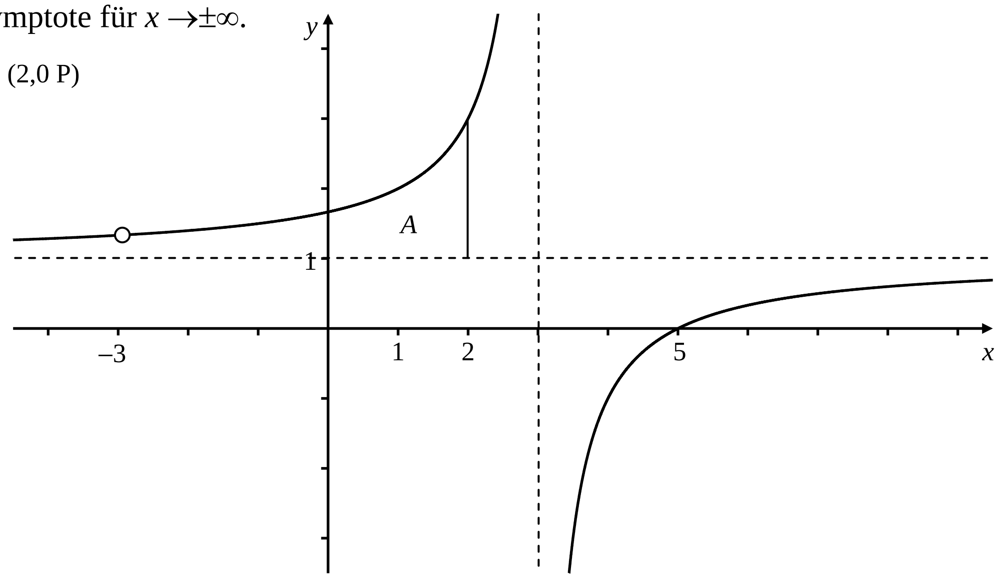
- *Verhalten in der Nähe der Polstelle* (1,0 P)

Es gilt: $\lim\limits_{x\to 3^-} h_9(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-5}{x-3} = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to 3^+} h_9(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-5}{x-3} = -\infty$ .

- *Asymptote* (1,5 P)

  Aus der Zerlegung $h_9(x) = 1 - \dfrac{2}{x-3}$ (z.B. nach Polynomdivision) erhält man $h_A(x) = 1$ als Asymptote für $x \to \pm\infty$.

- *Graph* (2,0 P)




## 3.4 Flächenberechnung **3,5 Punkte**

$$\mu(A) = \int_0^2 (h_9(x) - h_A(x))\,dx = \int_0^2 \Big((1 - \frac{-2}{x-3}) - 1\Big)\,dx = \int_0^2 \frac{-2}{x-3}\,dx$$

$$= \big[-2\ln|x-3|\big]_0^2 = (-2)\cdot[\ln|1| - \ln|3|] = 2\ln(3) \approx 2{,}2$$

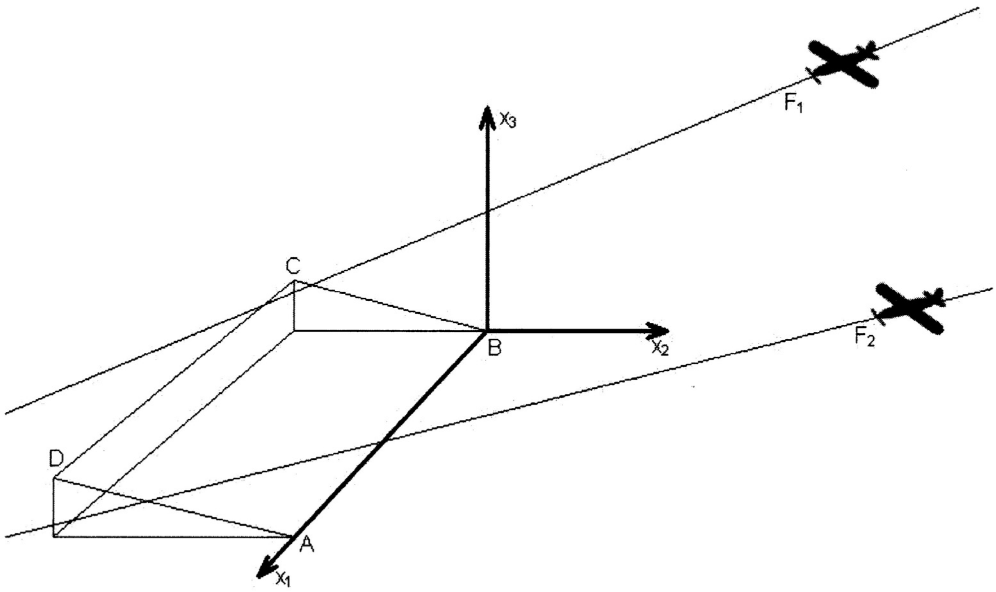
(Es ist empfehlenswert, den zerlegten Term für $h_9(x)$ zu verwenden.)

# Aufgabe 2
# ANALYTISCHE GEOMETRIE

Für eine Flugschau von Modellflugzeugen wurde auf einem ebenen Gelände, das in der $x_1$-$x_2$-Ebene liegt, eine Zuschauertribüne aufgebaut.

Die Eckpunkte im gewählten Koordinatensystem sind $A(30 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 0 \mid 0)$, $C(0 \mid -10 \mid 3)$ und $D(30 \mid -10 \mid 3)$ (siehe Abbildung). Die Einheit des Koordinatensystems beträgt 1 m.

Abbildung (nicht maßstabsgerecht)




**1.** Das Modellflugzeug $F_1$ befindet sich zunächst im Punkt $(-56 \mid 15 \mid 2)$ und bewegt sich geradlinig. Die geradlinige Flugbahn $g$ ist durch folgende Gleichung beschrieben:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -56 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \ .$$

1.1 Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $e$ auf, in der die Fläche $ABCD$ der Zuschauertribüne liegt.

Zeigen Sie, dass die Flugbahn des Modellflugzeugs $F_1$ parallel zu dieser Ebene $e$ verläuft.

[Zur Kontrolle: $e$: $3x_2 + 10\,x_3 = 0$ ]

1.2 Entgegen den Vorschriften überfliegt das Modellflugzeug $F_1$ die Kante $\overline{BC}$ der Tribüne. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P$, in dem das Flugzeug in den Luftraum senkrecht über der Tribüne eindringt.

Begründen Sie, dass dieser Punkt tatsächlich über der Kante $\overline{BC}$ liegt.

1.3 Berechnen Sie den Abstand, in dem das Flugzeug die Tribünenfläche überfliegt.

**2.** Ein zweites Modellflugzeug $F_2$ befindet sich zunächst im Punkt $H(-7 \mid 57 \mid 20)$ und fliegt in einer Richtung, die durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

2.1 Die Bahnen der beiden Modellflugzeuge schneiden einander im Punkt $S$. Berechnen Sie diesen Punkt $S$ und das Maß des Schnittwinkels.

2.2 Abseits der Tribüne steht ein Windrad, dessen 18 m lange Rotorblätter sich in der Ebene $e_R : x_1 - 2x_2 = 772$ um den Mittelpunkt $M(320 \mid -226 \mid 35)$ drehen.

Zeigen Sie, dass das Modellflugzeug $F_2$ bei unveränderter Flugbahn von den Rotoren des Windrades erfasst werden kann.

**3.** Im Folgenden soll in der Gleichung der Flugbahn $g$ von Modellflugzeug $F_1$

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -56 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

der Parameter $t$ als Maßzahl der Zeit in Sekunden nach dem Beobachtungsbeginn ($t = 0$) aufgefasst werden.

3.1 Nennen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem sich das Flugzeug $F_1$ zum Beobachtungsbeginn befindet und berechnen Sie die Länge der Strecke, die es pro Sekunde zurücklegt.

3.2 Wenn sich das Modellflugzeug $F_1$ im Punkt $(-56 \mid 15 \mid 2)$ befindet, befindet sich das Modellflugzeug $F_2$ in $H$.

Beschreiben Sie die Flugbahn von $F_2$ mit den Angaben aus Teilaufgabe 2 analog zu Flugbahn $g$ von $F_1$.

Untersuchen Sie anhand der Ergebnisse aus Teilaufgabe 2.1, ob die beiden Flugzeuge zusammenstoßen.

# L ö s u n g e n

## 1. Betrachtung der Flugbahn von $F_1$

Gegeben ist $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -56 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ mit Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ .

### 1.1 Koordinatengleichung und Parallelität der Flugbahn **4,0 Punkte**

- *Ebenengleichung*

– Richtungsvektoren: $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; wähle $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{u_2}$$

– Normalenvektor: $\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

– Punktnormalengleichung: $e\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$

– Allgemeine Normalengleichung: $e\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$

– Koordinatengleichung: $e\colon 3x_2 + 10\,x_3 = 0$

- *Nachweis der Parallelität*

Wegen $\begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$ gilt $g \parallel e$. Die Flugbahn von $F_1$ ist also parallel zur Ebene $e$.

### 1.2 Berechnung des Überflugpunkts $P$ und Lage von $P$ **2,5 Punkte**

- *Koordinaten von P*

Die Kante $\overline{BC}$ liegt in der $x_2$-$x_3$-Ebene. Der gesuchte Punkt $P$ ergibt sich Schnittpunkt der Flugbahn $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -56 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ von $F_1$ mit der $x_2$-$x_3$-Ebene (Gleichung $x_1 = 0$):

$$x_1 = 0 \Leftrightarrow -56 + 14 \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \ .$$

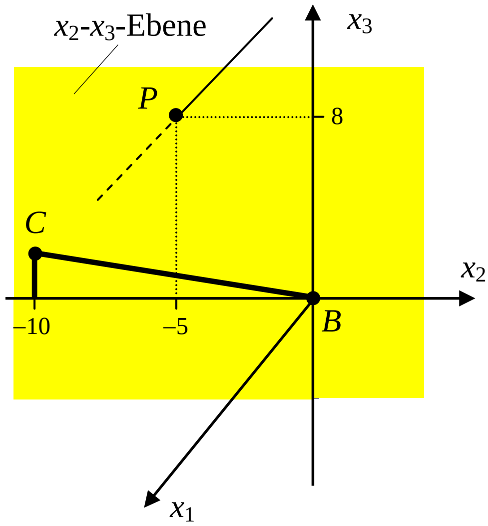
Einsetzen dieses Wertes in die Gleichung von $g$ liefert den Punkt $P(0 \mid -5 \mid 8)$ .

- *Lage von P*

  Der Punkt $P(0\,|\,-5\,|\,8)$ liegt wie die Punkte $B(0\,|\,0\,|\,0)$ und $C(0\,|\,-10\,|\,3)$ in der $x_2$-$x_3$-Ebene.

  Die $x_2$-Koordinate von $P$ liegt zwischen den $x_2$-Koordinaten von $B$ und $C$ (sogar genau in der Mitte).

  $P$ liegt senkrecht über der Mitte von $B$ und $C$.




**1.3 Abstand des Überflugpunktes von der Tribünenfläche** **2,5 Punkte**

Gesucht ist z. B. der Abstand des Punktes $P(0\,|\,-5\,|\,8)$ von der Ebene $e$: $3x_2 + 10\,x_3 = 0$.

(Da die Flugbahn von $F_1$ gemäß 1.1 parallel zur Ebene $e$ ist, kann jeder Punkt der Flugbahngeraden $g$ zur Abstandsberechnung verwendet werden, also auch z. B. der Aufpunkt $A(-56\,|\,15\,|\,2)$ )

<u>1. Möglichkeit</u>: Abstandsformel

$$\text{Wegen } B(0\,|\,0\,|\,0) \text{ ist } \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$d(P,e) = |\,\vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{BP}\,| = \tfrac{1}{|\vec{n}|}\,|\,\vec{n} \cdot \overrightarrow{BP}\,| = \left|\,\tfrac{1}{\sqrt{109}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{65}{\sqrt{109}} \approx 6{,}23$$

<u>2. Möglichkeit</u>: Lotgeradenmethode

$$\text{Lotgerade } l\text{: } \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Schnittpunkts von $l$ mit der Ebene $e$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \right] = 0 \;\Leftrightarrow\; 65 + 109\lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -\tfrac{65}{109}$$

Der Lotfußpunkt muss in diesem Fall nicht berechnet werden.
Der gesuchte Abstand ergibt mit dem errechneten Parameterwert zu:

$$|\,\overrightarrow{PL}\,| = |\,\vec{l} - \vec{p}\,| = |\,\lambda \cdot \vec{n}\,| = |-\tfrac{65}{109}| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \right\| = \tfrac{65}{109} \cdot \sqrt{0+9+100}$$

$$= \tfrac{65}{109} \cdot \sqrt{109} = \tfrac{65}{\sqrt{109}} \approx 6{,}23$$

Das Modellfugzeug überfliegt die Tribüne in einem Abstand von etwa 6,23 m.

## 2. Betrachtung der Flugbahn von $F_2$

Gegeben sind der Punkt $H(-7 \mid 57 \mid 20)$ und eine Richtung durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Flugbahn von $F_2$ folgt der Geraden $h$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 57 \\ 20 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

### 2.1 Schnittpunkte und Schnittwinkel der Flugbahnen von $F_1$ und $F_2$ **5,0 Punkte**

- *Schnittpunkt* (3,5 P)

  Gleichsetzen beider Flugbahngleichungen $g$ und $h$:

$$\begin{pmatrix} -56 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 57 \\ 20 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 14\lambda - 7\mu = 49 \\ -5\lambda + 6\mu = 42 \\ 1,5\lambda \quad\quad = 18 \end{bmatrix}$$

  Die dritte Gleichung liefert: $\lambda = 12$ .
  Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt: $-60 + 6\mu = 42 \Leftrightarrow \mu = 17$ .
  Eine Probe in der ersten Gleichung liefert die wahre Aussage: $168 - 119 = 49$ .

  Beide Geraden schneiden sich in dem Punkt $S(112 \mid -45 \mid 20)$ .

- *Schnittwinkel* (1,5 P)

  Richtungsvektoren der Flugbahnen:

  Flugbahn $F_1$: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{u}| = \sqrt{14^2 + (-5)^2 + 1,5^2} = \sqrt{223,5}$

  Flugbahn $F_2$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{v}| = \sqrt{7^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{85}$

  Damit folgt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|98 + 30 + 0|}{\sqrt{223,25} \cdot \sqrt{85}} = \frac{128}{\sqrt{223,25} \cdot \sqrt{85}} \approx 0,9292 \quad , \quad \text{also} \quad \alpha \approx 21,69°$$

  Das Maß des Schnittwinkels beträgt rund 21,69°.

### 2.2 Windrad abseits der Tribüne **5,0 Punkte**

Rotorenebene $e_R$: $= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 772$ (in der allgemeinen Normalenform)

Schnitt dieser Ebene mit der Flugbahngleichung von $F_2$ (Gerade $h$ aus 2.1):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} -7 \\ 57 \\ 20 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 772 \Leftrightarrow -121 + 19\mu = 772 \Leftrightarrow \mu = 47$$

Einsetzen von $\mu = 47$ in die Flugbahngleichung von $F_2$ liefert

$$\overrightarrow{s_2} = \begin{pmatrix} -7 \\ 57 \\ 20 \end{pmatrix} + 47 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 322 \\ -225 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der Schnittpunkt $S_2(322 \mid -225 \mid 20)$.

Der Abstand dieses Schnittpunkts $S_2$ vom Mittelpunkt $M$ des Windrades beträgt:

$$d(S_2,M) = |\overrightarrow{S_2M}| = \left| \begin{pmatrix} 320 \\ -226 \\ 35 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 322 \\ -225 \\ 20 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{230} \approx 15{,}2 \text{ (in m)}$$

Das Flugzeug kann von den Rotoren erfasst werden, weil der Abstand von $S_2$ zu $M$ kleiner als 18 m ist.

## 3. Zeitlicher Verlauf der Bewegungen von $F_1$ und von $F_2$

### 3.1 $F_1$ bei Beobachtungsbeginn und zurückgelegte Strecke pro Sekunde — 2,0 Punkte

Zum Beobachtungsbeginn ($t = 0$) befindet sich $F_1$ im Punkt $P_0(-56 \mid 15 \mid 2)$.

Die Länge der in einer Sekunde zurückgelegten Strecke beträgt:

$$|\vec{u}| = \sqrt{14^2 + (-5)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{223{,}25} \approx 14{,}9$$

In jeder Sekunde werden 14,9 m zurückgelegt.

### 3.2 Mögliche Kollision der beiden Flugzeuge — 3,0 Punkte

Für die Flugbahn von $F_2$ gilt nach 2.1: $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 57 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nach 2.1 wird Schnittpunkt $S$ der Flugbahnen von $F_1$ nach 12 s ($\lambda = 12$) und von $F_2$ nach 17 s ($\mu = 17$) durchflogen.

Der zeitliche Abstand von 5 s sichert die Nichtkollision.

# Aufgabe 3
# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

**1.** Ein Forscherteam besteht aus 24 Personen: dem Leiter Herrn Professor Fizlipuzli und 9 weiteren Wissenschaftlern und 14 Wissenschaftlerinnen. Eine Gruppe von 10 Personen soll eine Südamerikaexpedition durchführen. Die Personen werden zufällig ausgewählt.

1.1 Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, aus den 24 Personen des Teams ohne Berücksichtigung der Reihenfolge 10 Personen für die Expedition auszuwählen.

1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass gleich viele Männer wie Frauen für die Expedition ausgewählt werden.

1.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass neben Professor Fizlipuzli genau ein weiterer Mann in der Expeditionsgruppe ist.

**2.** Im Expeditionsgebiet gibt es zwei verschiedene Arten von Moskitos. Erfahrungsgemäß wird jedes Expeditionsmitglied mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% von der Moskitoart A und mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% von der Moskitoart B gestochen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, nur von der Moskitoart A gestochen zu werden, beträgt 40%.

Betrachtet werden die Ereignisse:

A : Ein Expeditionsmitglied wird von Moskitoart A gestochen.

B : Ein Expeditionsmitglied wird von Moskitoart B gestochen.

2.1 Erstellen Sie eine Vierfeldertafel mit der Angabe aller Wahrscheinlichkeiten.

2.2 Professor Fizlipuzli nimmt an der Expedition teil. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

2.2.1 Professor Fizlipuzli gestochen wird.

2.2.2 Professor Fizlipuzli von genau einer Moskitoart gestochen wird.

2.2.3 Prüfen Sie rechnerisch, ob die Moskitoarten A und B unabhängig voneinander Expeditionsmitglieder stechen.

**3.** Ein Ziel der Expedition ist die Erforschung giftiger Amphibien. Dazu werden Individuen gesammelt und auf Giftigkeit geprüft. Die Expeditionsstatistik zeigt, dass 36% der gesammelten Individuen Frösche sind, von denen ein Drittel giftig ist. Insgesamt sind 44% aller gesammelten Individuen giftig.

Eines der gesammelten Individuen wird untersucht. Betrachten Sie die Ereignisse:

F : Das untersuchte Individuum gehört zu den Fröschen.

G : Das untersuchte Individuum ist giftig.

3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{F}}(G)$.

Zeichnen Sie ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das betrachtete Individuum ein giftiger Frosch ist.

3.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Individuum ein Frosch ist, wenn bekannt ist, dass es giftig ist.

3.4 Berechnen Sie, wie viele Individuen mindestens untersucht werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% mindestens ein giftiges Individuum darunter ist.

**4.** Die Expeditionsgruppe führt in einer ersten Testreihe wiederholt ein Experiment durch, das mit einer zu bestimmenden Wahrscheinlichkeit $p$ gelingt.
Um diese Wahrscheinlichkeit $p$ abschätzen zu können, führen die Forscher das Experiment mehrfach unter gleichen Bedingungen durch und ermitteln dabei eine Erfolgsquote von 64%. Diese Erfolgsquote wird als Wert für $p$ angenommen. (Die einzelnen Durchführungen des Experiments werden als unabhängig voneinander angesehen.)

Die Forscher führen anschließend eine zweite Testreihe von 15 Durchführungen des Experimentes aus und dokumentieren, bei wie vielen Durchführungen das Experiment gelingt.

4.1 Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu$ und die Streuung $\sigma$ bei dieser zweiten Reihe.

4.2 Bestätigen Sie für diese Testreihe durch eine Rechnung, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der die Anzahl der gelingenden Experimente um höchstens $\sigma$ vom Erwartungswert abweicht, etwa 70% beträgt.

4.3 Bei der zweiten Testreihe hat sich Folgendes herausgestellt:

Mit einer relativen Häufigkeit von etwa 59% misslingt von zwei hintereinander durchgeführten Versuchen mindestens einer. Steht dieser Befund im Einklang mit der angenommenen Wahrscheinlichkeit $p$? Begründen Sie Ihre Einschätzung.

# L ö s u n g e n

## 1. Forscherteam

### 1.1 Auswahl von 10 Personen für die Expedition **1,0 Punkte**

Anzahl: $\binom{24}{10} = 1\,961\,256$ (Auswahl: 10 aus 24)

### 1.2 Auswahl von gleich vielen Männern und Frauen **1,5 Punkte**

Wahrscheinlichkeit: $P = \dfrac{\binom{10}{5}\cdot\binom{14}{5}}{\binom{24}{10}} \approx 25{,}7\%$

(Männer: 5 aus 10
Frauen: 5 aus 14 )

### 1.3 Professor Fizlipuzli und genau ein weiterer Mann in der Expeditionsgruppe **2,0 Punkte**

Wahrscheinlichkeit: $P = \dfrac{\binom{1}{1}\cdot\binom{9}{1}\cdot\binom{14}{8}}{\binom{24}{10}} \approx 1{,}4\%$

( Professor: 1 aus 1
weiterer Mann: 1 aus 9
Frauen: 8 aus 14 )

## 2. Moskitoarten

### 2.1 Vierfeldertafel **2,0 Punkte**

| | B | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| A | 0,3 | ***0,4*** | ***0,7*** |
| $\overline{A}$ | 0,2 | 0,1 | 0,3 |
| | ***0,5*** | 0,5 | 1 |

(Gegebene Wahrscheinlichkeiten sind fett und kursiv gedruckt.)

### 2.2 Professor Fizlipuzli

#### 2.2.1 Professor Fizlipuzli wird gestochen **2,0 Punkte**

$P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}9$ (aus der Vierfeldertafel)

(*oder*: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}9$ )

#### 2.2.2 Professor Fizlipuzli wird von genau einer Moskitoart gestochen **1,5 Punkte**

$P(\,(A \cap \overline{B}\,) \cup (\,\overline{A} \cap B)\,) = P(A \cap \overline{B}\,) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$

#### 2.2.3 Prüfung auf Unabhängigkeit **1,0 Punkte**

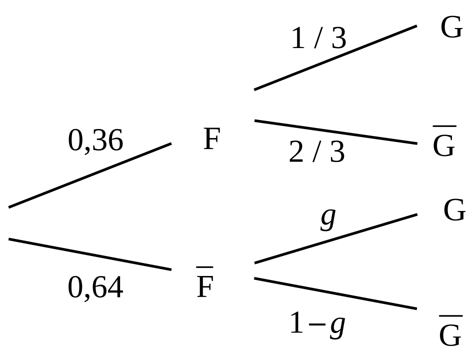
Aus der Vierfeldertafel ergibt sich: $P(A \cap B) = 0{,}3$ und
$P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35$ .

Die Ereignisse A und B sind daher abhängig.

## 3. Amphibien

### 3.1 Baumdiagramm und Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{F}}$(G) **4,0 Punkte**

- *Baumdiagramm* (zunächst noch unvollständig)




- *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

  Gegeben ist $P$(G) = 0,44. Aus dem Baumdiagramm ergibt sich:

$$P(\text{G}) = 0{,}44 \Leftrightarrow 0{,}36 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}64 \cdot g = 0{,}44$$
$$\Leftrightarrow 0{,}12 + 0{,}64 \cdot g = 0{,}44$$
$$\Leftrightarrow 0{,}64 \cdot g = 0{,}44$$
$$\Leftrightarrow g = 0{,}5$$

  Dies bedeutet: $g = P_{\overline{F}}(\text{G}) = P(\text{G} \mid \overline{\text{F}}) = \frac{1}{2}$ .

### 3.2 Betrachtetes Individuum ist ein giftiger Frosch. **1,0 Punkte**

Gesucht ist die „Und"-Wahrscheinlichkeit $P(\text{F} \cap \text{G})$. Sie kann direkt aus dem Baumdiagramm abgelesen werden:

$$P(\text{F} \cap \text{G}) = 0{,}36 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}12 \,.$$

### 3.3 Individuum ist ein Frosch, wenn bekannt ist, dass er giftig ist. **1,5 Punkte**

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\text{G}}(\text{F}) = P(\text{F} \mid \text{G})$.

Mit den Ergebnissen P(G) = 0,44 aus 3.1 und $P(\text{F} \cap \text{G}) = 0{,}12$ aus 3.2 ergibt sich:

$$P_{\text{G}}(\text{F}) = \frac{P(\text{F} \cap \text{G})}{P(\text{G})} = \frac{0{,}12}{0{,}44} = \frac{3}{11} \approx 27{,}3\,\% \,.$$

### 3.4 Berechnung der Kettenlänge **2,0 Punkte**

Zufallsgröße $X$: Anzahl der giftigen Individuen (binomialverteilt mit $p = 0{,}44$)

$$P(X \geq 1) > 0{,}98 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0{,}98$$
$$\Leftrightarrow -P(X = 0) > -0{,}02 \quad | \cdot (-1)$$
$$\Leftrightarrow P(X = 0) < 0{,}02$$
$$\Leftrightarrow 0{,}56^n < 0{,}02 \quad | \ \ln$$
$$\Leftrightarrow n \ln(0{,}56) < \ln(0{,}02) \quad | : \ln(0{,}56) < 0$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}56)}$$
$$\Leftrightarrow n > 6{,}7$$

Es müssen mindestens 7 Individuen gefangen werden.

## 4. Durchführung eines Experiments

### 4.1 Erwartungswert und Streuung **1,0 Punkte**

Zufallsgröße $X$: Anzahl der erfolgreichen Durchführungen des Experiments
(binomialverteilt mit $n = 15$ und $p = 0{,}64$)

Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 15 \cdot 0{,}64 = 9{,}6$

Streuung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{15 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}36} \approx 1{,}86$

### 4.2 Abweichung um höchstens $\sigma$ vom Erwartungswert $\mu$ **2,5 Punkte**

Intervall: $[\mu - \sigma\,;\, \mu + \sigma] = [9{,}6 - 1{,}86\,;\, 9{,}6 + 1{,}86] = [7{,}74\,;\, 11{,}46] \underset{\mathbb{N}}{=} \{8\,;\, 9\,;\, 10;\, 11\}$

Summenwahrscheinlichkeit (Bernoullikette mit $n = 15$ und $p = 0{,}64$):

$$P(8 \le X \le 11) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11)$$

$$= \binom{15}{8} \cdot 0{,}64^8 \cdot 0{,}36^7 + \binom{15}{9} \cdot 0{,}64^9 \cdot 0{,}36^6 + \binom{15}{10} \cdot 0{,}64^{10} \cdot 0{,}36^5 + \binom{15}{11} \cdot 0{,}64^{11} \cdot 0{,}36^4$$

$$\approx 0{,}1419 + 0{,}1963 + 0{,}2093 + 0{,}1692$$

$$= 0{,}7167 = 71{,}67\%$$

### 4.3 Befund im Einklang mit angenommener Wahrscheinlichkeit $p$ **3,0 Punkte**

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis:

E: „Bei zwei hintereinander durchgeführten Experimenten misslingt mindestens ein Experiment.“

*Interpretation als Bernoulli-Kette*:

Treffer: „Experiment misslingt“ mit $n = 2$ und $p = 0{,}36$

$$P(E) = P(T \ge 1) = 1 - P(T = 0) = 1 - \binom{2}{0} \cdot 0{,}36^0 \cdot 0{,}64^2$$

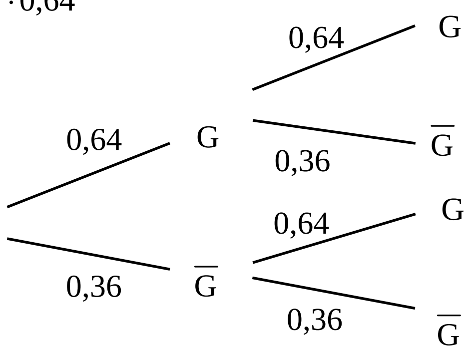
$$= 1 - 0{,}64^2 \approx 0{,}59$$

*Lösung anhand eines Baumdiagramms*:

$P(E) = 0{,}64 \cdot 0{,}36 + 0{,}36 \cdot 0{,}64 + 0{,}36^2 \approx 0{,}59$

oder bei Betrachtung des Gegenereignisses:

$P(E) = 1 - 0{,}64^2 \approx 0{,}59$




Diese Wahrscheinlichkeit steht im Einklang mit der relativen Häufigkeit 59%.

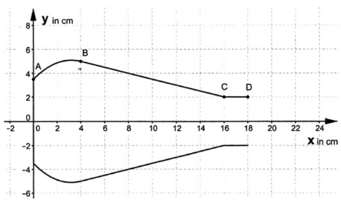
# Schriftliche Abiturprüfung 2014

## E-Kurs

## Nachtermin

**Themenübersicht**

- <u>Aufgabe 1</u>: **Analysis**

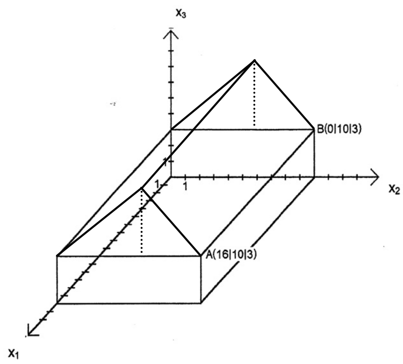
  
  

  – Volumenberechnung
  Modellierung eines Erlenmeyerkolbens
  durch eine ganzrationale Funktion

  – Untersuchung der gebrochenrationalen Funktionenschar $f_k(x) = \frac{2 \cdot (x^2 - k)}{x^2}$

  – Untersuchung der Funktion $g(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

- <u>Aufgabe 2</u>: **Analytische Geometrie**

  – Spiegelebene

  – Flächeninhaltsberechnung (Dachfläche)

  – Schnitt einer Ebene mit der $x_1$-$x_2$-Ebene

- <u>Aufgabe 3</u>: **Stochastik**

  – Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel (mit absoluten Werten)

  – Kombinatorik

  – Bernoulli-Kette

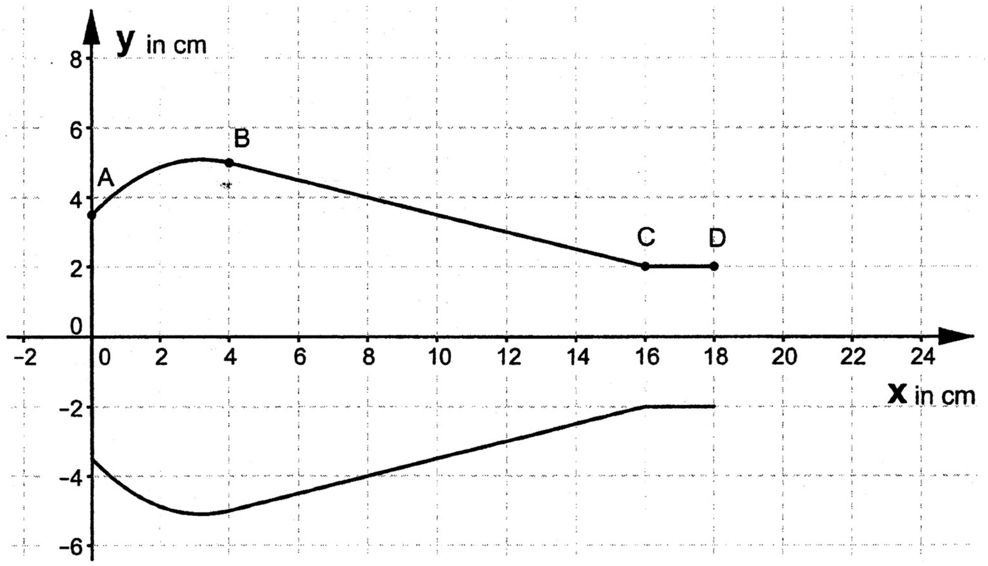
  – Bestimmung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung
  und Berechnung des Erwartungswertes

SOFTFRUTTI verlag
www.softfrutti.de

# Aufgabe 1
# ANALYSIS

**1.** Ein Erlenmeyerkolben aus der Chemiesammlung einer Schule soll mathematisch modelliert werden.

In der Abbildung ist dazu ein Längsschnitt durch die Symmetrieachse des Kolbens dargestellt. Die Dicke des Glases ist in der Abbildung nicht wiedergegeben; sie wird vernachlässigt.




1.1 Zwischen den Punkten $B(4 \mid 5)$ und $C(16 \mid 2)$ sowie zwischen $C$ und $D(18 \mid 2)$ (siehe Abb.) verläuft der Rand des Kolbens im gewählten Modell jeweils geradlinig.

Geben Sie je eine Gleichung der Geraden an, auf denen die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ liegen.

1.2 Zwischen dem Punkt $A(0 \mid 3{,}5)$ des Bodens und dem Punkt $B$ wird der Rand parabelförmig modelliert.

Stellen Sie die Gleichung der zugehörigen quadratischen Funktion $f$ auf. Beachten Sie dabei, dass die Parabel im Punkt $B$ knickfrei in das geradlinige Stück übergeht.

1.3 Durch Rotation der Strecke $\overline{OA}$ und des oberen Randes $ABCD$ um die $x$-Achse entsteht das betrachtete Modell des Erlenmeyerkolbens.

1.3.1 Berechnen Sie unter Angabe eines Integralansatzes und einer Stammfunktion das Volumen des unteren Teils des Kolbens bis zu einer Füllhöhe von 4 cm.

<u>Hinweis</u>:

Bei der Berechnung des Kolbenvolumens im unteren Teil können Sie ohne weitere Rechnung den Ausdruck $f^2(x) = \frac{25}{1024}x^4 - \frac{5}{16}x^3 - \frac{3}{32}x^2 + 7x + \frac{49}{4}$ verwenden.

1.3.2 Zeigen Sie, dass das Volumen des Teils des Kolbens, der oberhalb einer Füllhöhe von 4 cm liegt, die Maßzahl $164\,\pi$ hat.

Geben Sie dann das Gesamtvolumen des Kolbens in $cm^3$, gerundet auf zwei Nachkommastellen, an.

**2.** Gegeben ist eine Funktionenschar durch

$$f_k : D_{\max} \to \mathbb{R} \text{ mit } f_k(x) = \frac{2 \cdot (x^2 - k)}{x^2} \text{ mit } k \in \mathbb{R} .$$

2.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge $D_{\max}$ und untersuchen Sie die Funktionen der Schar auf Symmetrie.

2.2 Untersuchen Sie die Scharfunktionen auf Nullstellen in Abhängigkeit von $k$ und geben Sie diese gegebenenfalls an.

2.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte einer Scharfunktion bei Annäherung der $x$-Werte an die Definitionslücke in Abhängigkeit von $k$.

Geben Sie insbesondere an, für welche Werte von $k$ die Definitionslücke eine Polstelle bzw. eine behebbare Lücke ist.

2.4 Bestimmen Sie die Asymptote für $|x| \to \infty$.

2.5 Geben Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse die Definitionslücke der Funktion $f_1$, die Nullstellen sowie die Asymptote von $f_1$ an.

Skizzieren Sie den Graphen von $f_1$.

2.6 Berechnen Sie das Maß der Fläche zwischen dem Graphen von $f_1$ und dem Intervall $[1\,;2]$ unter Angabe einer Stammfunktion. (*Hinweis*: $f_1(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$ )

2.7 Sei $a \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 2$.

Bestimmen Sie den Wert des Parameters $a$ so, dass gilt: $\int_a^2 f_1(x)\,dx = 0$.

Deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

**3.** Gegeben ist eine Funktion $g : D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ .

3.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge $D_{\max}$ und beschreiben Sie das Grenzwertverhalten der Funktion g an der Definitionslücke.

3.2 Ermitteln Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

3.3 Untersuchen Sie die Funktion $g$ auf Extrempunkte.
Zeichnen Sie den Graphen von $g$.

3.4 Mit Hilfe des Funktionswertes $g(x)$ lässt sich die Anzahl der Primzahlen, die kleiner oder gleich einer gegebenen natürlichen Zahl $x$ sind, abschätzen.

Überprüfen Sie dies durch Berechnung des Funktionswertes $g(10)$.

Schätzen Sie mit Hilfe der Funktion $g$ die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als 2014 sind, ab.

# L ö s u n g e n

## 1. Betrachtung des Längsschnitts eines Erlenmeyerkolbens

### 1.1 Geradengleichungen für die Stecken $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ **2,0 Punkte**

Gerade zur Stecke $\overline{BC}$: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-5}{16-4} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$

$$y = m \cdot (x - x_1) + y_1 = -\frac{1}{4} \cdot (x-4) + 5 = -\frac{1}{4} \cdot x + 6$$

Gerade zur Stecke $\overline{CD}$: $y = 2$ (Parallele zur $x$-Achse)

### 1.2 Funktionsgleichung für das Parabelstück **6,0 Punkte**

Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$ , $f'(x) = 2ax + b$

Bedingungen:

$$\begin{array}{llll} f(0) = 3{,}5 & \Leftrightarrow\ c = 3{,}5 & & \text{(Punkt } A\text{)} \\ f(4) = 5 & \Leftrightarrow\ 16a + 4b + 3{,}5 = 5 & & \text{(Punkt } B\text{)} \\ & \Leftrightarrow\ 16a + 4b = 1{,}5 & \text{(II)} & \\ f'(4) = -0{,}25 & \Leftrightarrow\ 8a + b = -0{,}25 & \text{(III)} & \text{(Übergang in } B\text{)} \end{array}$$

Lösung des Gleichungssystems:

(II) – 2(III): $2b = 2 \Leftrightarrow b = 1$

in (III): $8a + 1 = -0{,}25 \Leftrightarrow 8a = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{5}{32}$

Parabelgleichung: $f(x) = -\frac{5}{32}x^2 + x + \frac{7}{2}$

### 1.3 Rotation um die *x*-Achse

1.3.1 Volumen des unteren Teils des Kolbens bis zu einer Füllhöhe von 4cm **4,0 Punkte**

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \cdot \int_0^4 f^2(x)\,dx \\ &= \pi \cdot \int_0^4 \left(\tfrac{25}{1024}x^4 - \tfrac{5}{16}x^3 - \tfrac{3}{32}x^2 + 7x + \tfrac{49}{4}\right) dx \qquad \text{(gemäß Hinweis)} \\ &= \pi \cdot \left[\tfrac{25}{5120}x^5 - \tfrac{5}{64}x^4 - \tfrac{1}{32}x^3 + \tfrac{7}{2}x^2 + \tfrac{49}{4}x\right]_0^4 \\ &= \pi \cdot [5 - 20 - 2 + 56 + 49] = 88\pi \end{aligned}$$

1.3.2 Volumen des Kolbens oberhalb einer Füllhöhe von 4cm **5,5 Punkte**

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \cdot \underbrace{\int_4^{16} \left(-\tfrac{1}{4}x + 6\right)^2 dx}_{\text{Teil von } B \text{ bis } C} + \underbrace{\pi \cdot 2^2 \cdot 2}_{\substack{\text{Teil von } C \text{ bis } D \\ \text{(Zylinder)}}} \\ &= \pi \cdot \int_4^{16} \left(\tfrac{1}{16}x^2 - 3x + 36\right) dx + 8\pi \\ &= \pi \cdot \left[\tfrac{1}{48}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + 36x\right]_4^{16} + 8\pi \\ &= \pi \cdot \left[\left(\tfrac{256}{3} - 384 + 576\right) - \left(\tfrac{4}{3} - 24 + 144\right)\right] + 8\pi = 156\pi + 8\pi = 164\pi \end{aligned}$$

Gesamtvolumen: $V = V_1 + V_2 = 88\pi + 164\pi = 252\pi \approx 791{,}68$ (cm$^3$)

## 2. Betrachtung einer gebrochenrationalen Funktionenschar

Betrachtet wird die Funktionenschar $f_k : D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{2\cdot(x^2-k)}{x^2}$ mit $k \in \mathbb{R}$ .

### 2.1 Maximale Definitionsmenge und Symmetrie **2,0 Punkte**

Es gilt: $D_{\max} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$D_{\max} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist symmetrisch und für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt:

$$f_k(-x) = \frac{2\cdot((-x)^2-k)}{(-x)^2} = \frac{2\cdot(x^2-k)}{x^2} = f_k(x).$$

Alle Funktionen der Schar sind daher symmetrisch zur $y$-Achse.

Alternative: Das sowohl das Zähler- als auch das Nennerpolynom der Funktion $f$ symmetrisch zur $y$-Achse sind, gilt dies auch für die Funktion $f$ selbst.

### 2.2 Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameterwert *k* **2,0 Punkte**

Ansatz: $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cdot(x^2-k)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2-k=0 \Leftrightarrow x^2 = k$

$k<0$: keine Nullstellen

$k=0$: keine Nullstelle ($x=0$ gehört nicht zu $D_{\max}$ ; $x=0$ ist behebbare Lücke)

$k>0$: zwei Nullstellen $x = -\sqrt{k}$ oder $x = \sqrt{k}$

### 2.3 Verhalten an den Definitionslücken **3,5 Punkte**

In $D_{\max}$ gilt: $f_k(x) = \frac{2\cdot x^2}{x^2} - \frac{2\cdot k}{x^2} = 2 - \frac{2\cdot k}{x^2}$ .

$k>0$: Es gilt $\lim\limits_{x\to 0^-} f_k(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to 0^+} f_k(x) = -\infty$.

Die Definitionslücke 0 ist eine Polstelle.

$k<0$: Es gilt $\lim\limits_{x\to 0^-} f_k(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to 0^+} f_k(x) = +\infty$.

Die Definitionslücke 0 ist auch in diesem Fall eine Polstelle.

$k=0$: Es gilt $\lim\limits_{x\to 0^-} f_0(x) = 2$ und $\lim\limits_{x\to 0^+} f_0(x) = 2$.

Die Definitionslücke 0 ist in diesem Fall behebbar.

### 2.4 Asymptote für $|x| \to \infty$ **0,5 Punkte**

Durch eine Polynomdivision oder aus der Darstellung gemäß 2.3 folgt $f_A(x) = 2$ als Gleichung der Asymptote.

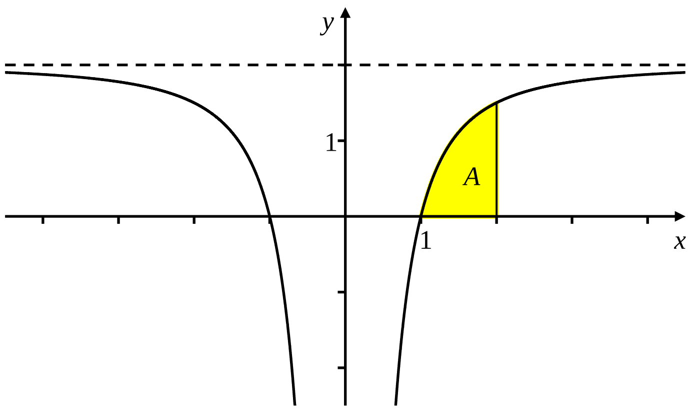
### 2.5 Ergebnisse und Skizze für $f_1(x)$ **3,0 Punkte**

Es gilt: $f_1(x) = \frac{2\cdot(x^2-1)}{x^2} = 2 - \frac{2}{x^2}$

Definitionslücke: $x=0$ (Polstelle)

Nullstellen: $x=-1$ und $x=1$

Asymptote: $f_A(x) = 2$



**2.6 Maß der Fläche zwischen $G_{f_1}$ und [1 ; 2]** **2,0 Punkte**

$$\mu(A) = \int_1^2 f_1(x)\,dx = \int_1^2 (2 - \tfrac{2}{x^2})\,dx = \left[2x + \tfrac{2}{x}\right]_1^2 = (4+1) - (2+2) = 1 \text{ (FE)}$$

(Zerlegten Term (nach Polynomdivision) gemäß 2.3 zur Bestimmung einer Stammfunktion verwenden.)

**2.7 Bestimmung eines Wertes des Parameters *a*** **3,5 Punkte**

Bedingung: $\int_a^2 f_1(x)\,dx = 0$ für $a > 0$ und $a \neq 2$

Es gilt: $\int_a^2 f_1(x)\,dx \underset{2.6}{=} \left[2x + \tfrac{2}{x}\right]_a^2 = 5 - (2a + \tfrac{2}{a})$

Bedingung:

$$\begin{aligned}
& & 5 - 2a - \tfrac{2}{a} &= 0 \quad | \cdot a \neq 0\\
&\Leftrightarrow & 5a - 2a^2 - 2 &= 0\\
&\Leftrightarrow & a^2 - \tfrac{5}{2}a &= -1\\
&\Leftrightarrow & (a - \tfrac{5}{4})^2 &= -1 + \tfrac{25}{16}\\
&\Leftrightarrow & (a - \tfrac{5}{4})^2 &= \tfrac{9}{16}\\
&\Leftrightarrow & a - \tfrac{5}{4} = -\tfrac{3}{4} &\text{ oder } a - \tfrac{5}{4} = \tfrac{3}{4}\\
&\Leftrightarrow & a = \tfrac{1}{2} &\text{ oder } \underbrace{a = 2}_{\substack{\text{ausgeschlossen}\\ \text{nach Voraussetzung}}}
\end{aligned}$$

Das Integral als Summe orientierter Flächeninhalte ergibt Null, da die Teilflächen unter [0,5 ; 1] und über [1 ; 2] maßgleich sind und sich wegen der unterschiedlichen Vorzeichen aufheben.

**3. Betrachtung einer ln-Funktion**

Betrachtet wird die Funktion $g: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ .

**3.1 Maximale Definitionsmenge und Grenzwertverhalten an der Lücke** **2,0 Punkte**

Es gilt: $D_{\max} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ (Nullstelle 1 des Nennerterms ausschließen und Definitionsmenge der ln-Funktion beachten)

Für die einseitigen Grenzwerte an der Definitionslücke 1 gilt:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x \to 1^+} g(x) = +\infty.$$

**3.2 Grenzwerte an den Rändern der Definitionsmenge** **3,0 Punkte**

Für die Grenzwerte an den Rändern der Definitionsmenge gilt:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (\underbrace{x}_{\to 0^+} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{\ln(x)}}_{\to -\infty}) = 0^- \quad \text{(Die Potenzfunktion dominiert.)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (\underbrace{x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{\ln(x)}}_{\to 0^+}) = +\infty \quad \text{(Die Potenzfunktion dominiert.)}$$

### 3.3 Untersuchung auf Extrempunkte und Graph der Funktion *g* **8,5 Punkte**

Ableitung: $g'(x) = \dfrac{\ln(x)\cdot 1 - x\cdot\frac{1}{x}}{\ln(x)^2} = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$

Notw. Bedingung:

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$ (mit Vzw.)

Hinr. Bedingung:

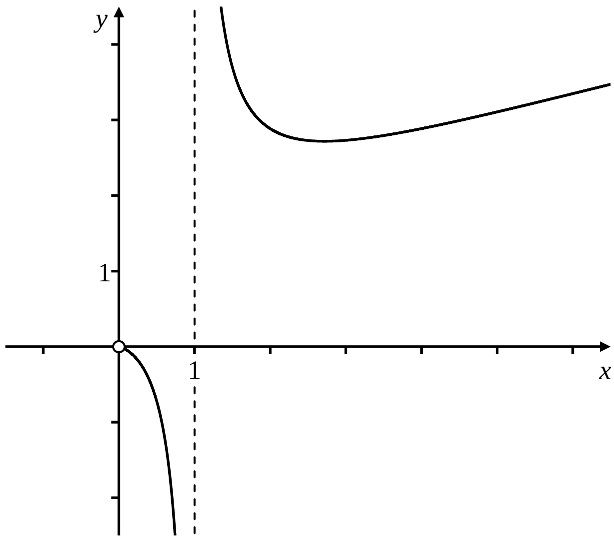
Vorzeichentabelle:

| $x$ | 0 | | 1 | | e | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | \| | + | \| | – | 0 | + |
| | | | mit Vzw.<br>Pol | | mit Vzw.<br>TP | |

Testwert: $g'(3) \approx 0{,}08 > 0$

Funktionswert: $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ ; Extrempunkt: $T(\mathrm{e} \mid \mathrm{e})$

Graph der Funktion $g$:




### 3.4 Primzahlfunktion **2,5 Punkte**

Es gilt: $g(10) \approx 4{,}34$

Diese Abschätzung ist korrekt, da es 4 Primzahlen kleiner als 10 gibt.

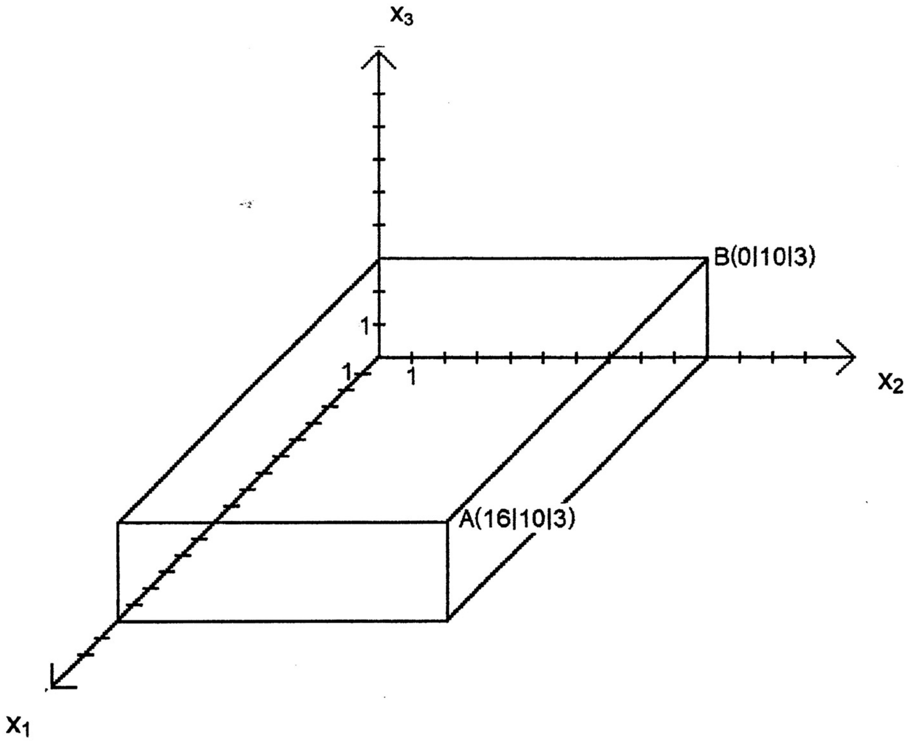
Es gilt: $g(2014) \approx 265$

Also gibt es etwa 265 Primzahlen kleiner als 2014.

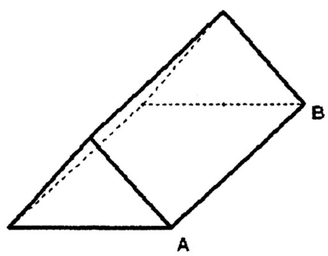
(In Wirklichkeit sind es 305.)

# Aufgabe 2
# ANALYTISCHE GEOMETRIE

Die Abbildung zeigt den unteren Teil eines großen Zeltes der örtlichen Pfadfinder. Das Zeltdach ist noch nicht in der Zeichnung zu sehen und muss später ergänzt werden. Der untere Teil des Zeltes hat die Form eines oben offenen Quaders, wobei drei Kanten auf den Koordinatenachsen liegen. Die Einheit des Koordinatensystems beträgt 1 m.




**2.1** Die senkrecht stehenden Seitenflächen des Daches haben die Form gleichschenkliger Dreiecke mit einer Höhe von 4 m. Deren Spitzen („Giebelspitzen") befinden sich senkrecht über den Mitten der oberen 10 m breiten Kanten des Quaders. Das Dach hat die nebenstehend abgebildete Form und ist unten offen.



(nicht maßstabsgerecht)

Geben Sie die Koordinaten der Giebelspitzen an.

Stellen Sie eine Gleichung der Geraden durch die beiden Giebelspitzen auf.

**2.2** Die schrägen rechteckigen Dachflächen enden auf den oberen langen Kanten des Quaders. Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $e_1$ auf, in der die rechte Dachfläche liegt.
[Zur Kontrolle: $e_1$: $4 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 - 55 = 0$ ]

**2.3** Die linke Dachfläche ergibt sich durch Spiegelung der rechten Dachfläche an einer Ebene $e_S$. Beschreiben Sie die Lage dieser Spiegelebene $e_S$ und stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $e_2$ auf, in der sich die linke Dachfläche befindet.

**2.4** Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse das Dach in die obige Abbildung ein.

**2.5** Eine Zeltplane soll die gesamte Dachfläche (zwei rechteckige und zwei dreieckige Dachflächen) vollständig abdecken.

Ermitteln Sie, wie groß der Flächeninhalt der Plane mindestens sein muss.

**2.6** Das Zelt wird auf beiden Seiten mit Hilfe von mehreren Spannseilen im Boden verankert. Die Seile verlaufen auf der rechten Seite in der Verlängerung der Dachschräge parallel zu den Schenkeln der Giebeldreiecke.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden $g$, auf der alle Befestigungspunkte am Boden liegen. Geben Sie auch die Parameterbedingungen für die möglichen Befestigungspunkte an.

**2.7** Senkrecht über der Mitte des rechteckigen Bodens soll eine Lampe an einem Kabel, das an der oberen Dachkante befestigt wird, aufgehängt werden. Um eine gleichmäßige Ausleuchtung des Zeltes zu erreichen, soll die Lampe vom Boden genau so weit entfernt sein wie von den beiden schrägen Dachflächen.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, der den Ort der Lampe angibt.

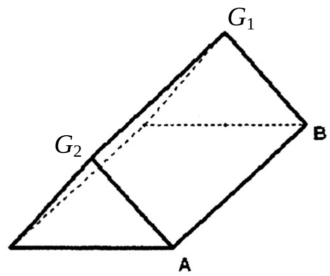
# L ö s u n g e n

## 2.1 Koordinaten der Giebelspitzen und Geradengleichung **2,0 Punkte**

Giebelspitzen: $G_1(0 \mid 5 \mid 7)$ und $G_2(16 \mid 5 \mid 7)$

Gleichung der Geraden durch die Giebelspitzen $g$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ .

## 2.2 Koordinatengleichung der Ebene $e_1$, in der die rechte Dachfläche liegt **3,5 Punkte**




- Richtungsvektoren: $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{BG_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{v}$

- Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

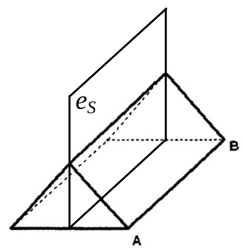
- Punktnormalengleichung: $e_1$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$

- Allgemeine Normalengleichung: $e_1$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 55 = 0$

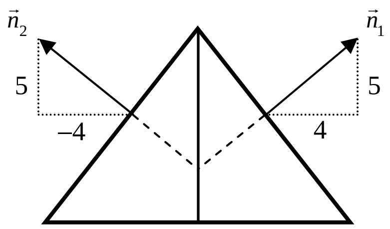
- Koordinatengleichung: $e_1$: $4x_2 + 5x_3 - 55 = 0$

## 2.3 Beschreibung der Spiegelebene $e_S$ und Koordinatengleichung von $e_2$, in der die linke Dachfläche liegt **3,5 Punkte**

Die Spiegelebene $e_S$ ist eine Parallelebene zur $x_1$-$x_3$-Ebene durch die obere Dachkante.




Spiegelt man den Normalenvektor von $e_1$ an dieser Ebene $e_S$, so ändert sich die $x_2$-Komponente.



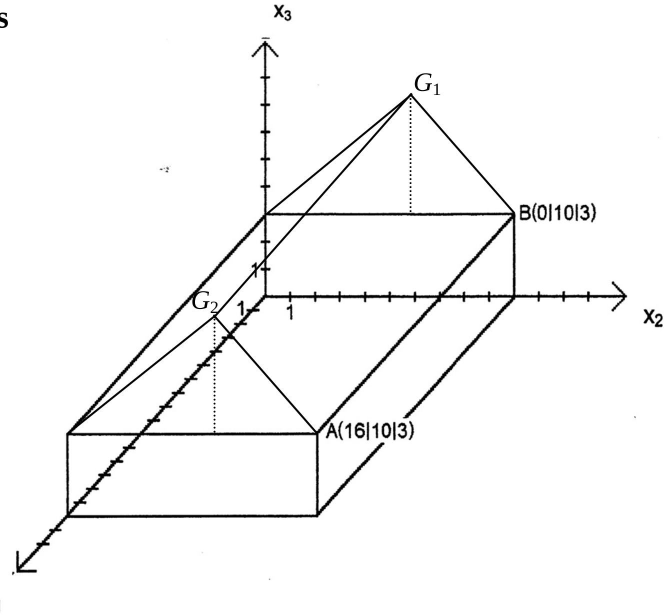

Normalenvektor von $e_2$: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2. Komponente $4 \to -4$)

$e_2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow -4x_2 + 5\,x_3 - 15 = 0$ ($G_1$ als Aufpunkt gewählt)

### 2.4 Zeichnung des Daches

**2,0 Punkte**




### 2.5 Flächeninhalt der Plane

**2,5 Punkte**

- *Dreiecksflächen* (vordere und hintere Giebelflächen):

  $\mu_1 = 2 \cdot \mu(A_\Delta) = 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}) = 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4) = 40$

- *Rechteckige Dachflächen*:

  Für die Breite gilt: $|\overrightarrow{BG_1}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0+25+16} = \sqrt{41}$

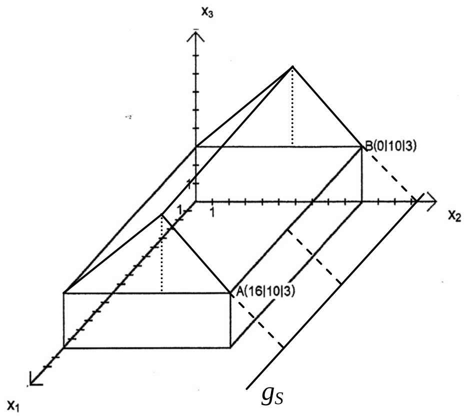
  $\mu_2 = 2 \cdot \mu(A_\square) = 2 \cdot (\text{Länge} \cdot \text{Breite}) = 2 \cdot (16 \cdot \sqrt{41}) \approx 204{,}90$

- *Gesamtfläche*: $\mu(A) = \mu_1 + \mu_2 = 244{,}9 \approx 245\ (\text{m}^2)$

### 2.6 Gleichung der Geraden, auf der die Befestigungspunkte liegen

**5,0 Punkte**

Die Gerade $g_S$ ergibt sich als Schnittmenge der Ebene $e_1$ mit der $x_1$-$x_2$-Ebene.




1. Möglichkeit: Beide Ebenen in Koordinatenform betrachten.

$$\begin{aligned} x_1\text{-}x_2\text{-Ebene:} \quad & \left\{ \begin{array}{rl} x_3 = 0 & \text{(I)} \\ 4x_2 + 5x_3 = 55 & \text{(II)} \end{array} \right. \\ \text{Ebene } e_1\text{:} \quad & \end{aligned}$$

Die Variable $x_1$ ist frei wählbar; wähle $x_1 = \lambda$.

Aus (II) folgt wegen $x_3 = 0$: $x_2 = 55 : 4 = 13{,}75$

Damit ergibt sich als Gleichung der gesuchten Geraden:

$$g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 13{,}75 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13{,}75 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Möglichkeit: Ebene $e_1$ Parameterform betrachten.

Eine Parametergleichung der Ebene für die rechte Dachfläche ist gemäß 2.2 gegeben durch:

$$e_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Schnitt von $e_1$ mit der $x_1$-$x_2$-Ebene:

$$x_3 = 0 \iff 3 + 4\mu = 0 \iff \mu = -\frac{3}{4}$$

Schnittgerade

$$g_S:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\frac{3}{4}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13{,}75 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Aufpunkt von $g_S$ liegt nach Konstruktion auf der $x_2$-Achse. Die möglichen Befestigungspunkte reichen bis in Höhe des Punktes $A$.

Für die Parameterwerte $\lambda$ für die Befestigungspunkte muss also gelten $\lambda \in [0\ ;\ 16]$ .

## 2.7 Punkt, der den Ort der Lampe angibt

**6,5 Punkte**

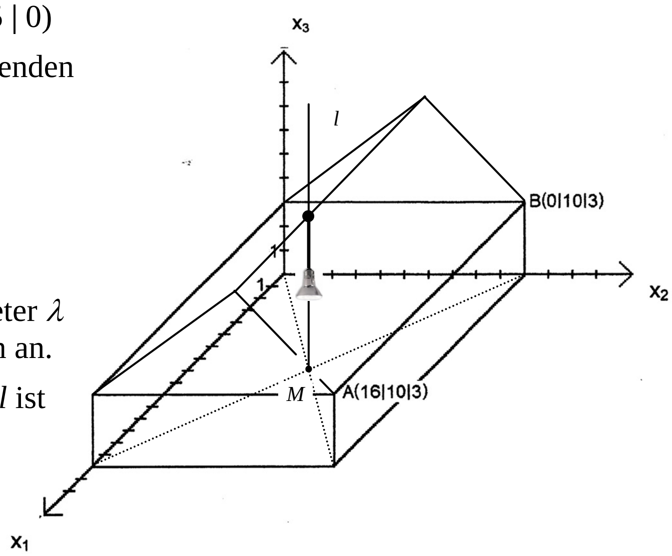
Mittelpunkt der Bodenfläche: $M(8 \mid 5 \mid 0)$

Die Lampe befindet sich auf der folgenden Lotgeraden $l$ zur $x_1$-$x_2$-Ebene:

$$l:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \geq 0)$$

In dieser Darstellung gibt der Parameter $\lambda$ die Höhe der Lampe über dem Boden an.

Ein beliebiger Punkt der Lotgeraden $l$ ist Gegeben durch $L(8 \mid 5 \mid \lambda)$.




Berechnet werden soll der Abstand dieses Punkts $L$ von der Ebene $e_1$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 55 = 0$.

Aus Symmetriegründen stimmt dieser Abstand auch mit dem Abstand zu $e_2$ überein.

1. Möglichkeit: Argumentation mithilfe der Abstandformel

Nach der Abstandformel gilt mit dem Punkt $A(16 \mid 10 \mid 3) \in e_1$:

$$d(L\,,e_1) = \left| \vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{AL} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ \lambda - 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot (-20 + 5\lambda - 15) \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot |\,5\lambda - 35\,|$$

Bedingung:

$$d(L\,,e_1) = \lambda \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot |\,5\lambda - 35\,| = \lambda$$

$$\Leftrightarrow\; |\,5\lambda - 35\,| = \sqrt{41}\,\lambda$$

$$\Leftrightarrow\; 5\lambda - 35 = -\sqrt{41}\,\lambda \quad \text{oder} \quad 5\lambda - 35 = \sqrt{41}\,\lambda$$

$$\Leftrightarrow\; (5 + \sqrt{41})\lambda = 35 \quad \text{oder} \quad (5 - \sqrt{41})\lambda = 35$$

$$\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{35}{5+\sqrt{41}} \approx 3{,}07 \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{35}{5-\sqrt{41}} < 0$$

(entfällt)

Die Lampe muss etwa 3,07 m über dem Boden hängen.

Der Aufhängepunkt ist $L(8 \mid 5 \mid 3{,}07)$.

2. Möglichkeit: Argumentation mithilfe der Lotgeradenmethode

Für die Lotgerade zur Ebene $e_1$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 55 = 0$ durch $P$ gilt:

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ \lambda \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Als Schnitt von $l$ und $e_1$ ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ \lambda \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right] - 55 = 0 \;\Leftrightarrow\; 20 + 5\lambda + 41\mu - 55 = 0$$

$$\Leftrightarrow\; 41\mu = 35 - 5\lambda$$

$$\Leftrightarrow\; \mu = \frac{35}{41} - \frac{5}{41}\lambda$$

Es folgt: $\overrightarrow{PL} = \vec{l} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ \lambda \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ \lambda \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\left| \overrightarrow{PL} \right| = |\mu| \cdot \sqrt{0+16+25} = \left| \frac{35}{41} - \frac{5}{41}\lambda \right| \cdot \sqrt{41} = \left| \frac{35}{\sqrt{41}} - \frac{5}{\sqrt{41}}\lambda \right|$$

Bedingung:

$$\left| \frac{35}{\sqrt{41}} - \frac{5}{\sqrt{41}}\lambda \right| = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \frac{35}{\sqrt{41}} - \frac{5}{\sqrt{41}}\lambda = \lambda \text{ oder } \frac{35}{\sqrt{41}} - \frac{5}{\sqrt{41}}\lambda = -\lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad 35 - 5\lambda = \sqrt{41}\,\lambda \text{ oder } 35 - 5\lambda = -\sqrt{41}\,\lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad 35 = (5 + \sqrt{41})\lambda \text{ oder } 35 = (5 - \sqrt{41})\lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{35}{5+\sqrt{41}} \approx 3{,}07 \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{35}{5-\sqrt{41}} < 0$$

(entfällt)

Die Lampe muss etwa 3,07 m über dem Boden hängen.

Der Aufhängepunkt ist $P(8 \mid 5 \mid 3{,}07)$.

# Aufgabe 3
# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

Nach einer durchwachsenen Saison stehen beim Fußballverein 1. FC Stubbe die Vorbereitungen für die kommende Spielzeit an.

**1.** Um mögliche Probleme zwischen Trainer und Mannschaft festzustellen, wurde eine Umfrage unter den Spielern durchgeführt.

Dabei wurden sowohl die Stammspieler (S) als auch die Ersatzspieler ($\overline{S}$) gefragt, ob sie ihr Verhältnis zum Trainer eher als gut (G) oder eher als schlecht ($\overline{G}$) einschätzen würden.

Von den 15 Stammspielern gaben12 an, ein gutes Verhältnis zum Trainer zu haben, von den 13 Ersatzspielern beantworteten nur 7 die Frage mit gut.

1.1 Stellen Sie das Umfrageergebnis mit Hilfe einer Vierfeldertafel dar.

1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Spieler

- ein gutes Verhältnis zum Trainer hat.
- ein Ersatzspieler mit schlechtem Verhältnis zum Trainer ist.
- Stammspieler ist, wenn bekannt ist, dass er ein gutes Verhältnis zum Trainer hat.

**2.** Der Trainer überlegt, für die nächste Saison die Aufstellung zu verändern, um mehr Spielern eine Chance zu geben, sich zu beweisen.

2.1 Es soll weiterhin in einem 1-4-4-2-System gespielt werden (1 Torhüter, 4 Abwehrspieler, 4 Mittelfeldspieler, 2 Stürmer). Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, eine solche Mannschaft unter den 3 Torhütern, 9 Abwehrspielern, 12 Mittelfeldspielern und 4 Stürmern seines Kaders aufzustellen?

2.2 Ein großes Problem der vergangenen Saison war die Abwehr, weshalb er auch innerhalb der Abwehr Positionen verändern will. Wie viele Möglichkeiten hat er, die 4 Abwehrspieler auf die 4 verschiedenen Positionen in der Abwehr zu verteilen? Berechnen Sie diese Anzahl.

**3.** Besonders schlecht und zugleich ärgerlich war die Ausbeute bei den Elfmetern. Am Ende jeder Trainingseinheit macht der Trainer deshalb folgende Ansage: „Jeder, der nicht mindestens 4 von 5 Elfmetern trifft, macht nach dem Training noch einen 10 km langen Waldlauf!“ (Im Folgenden soll die Trefferwahrscheinlichkeit der Spieler als gleich bleibend angesehen werden.)

3.1 David ist ein guter Elfmeterschütze und verwandelt durchschnittlich 80 % seiner Elfmeter. Er nimmt sich vor, die ersten 4 Schüsse zu verwandeln. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihm dies gelingt.

3.2 Mittelfeldstar Robert hat in der Vergangenheit nur 60 % seiner Elfmeter verwandelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er zum Waldlauf muss.

3.3 Thomas, der sicherste Schütze des Teams, nimmt sich als erster den Ball und behauptet: „Ich hau alle fünf rein!" Berechnen Sie, wie groß seine Trefferwahrscheinlichkeit mindestens sein müsste, damit er mit mindestens 90 % Recht behält?

**4.** Die Mannschaft hat in der letzten Saison nur 10 von 34 Spielen gewonnen. Vor der neuen Runde macht der Verein den Spielern folgendes Angebot: Gewinnt das Team die ersten drei Spiele, bekommt jeder Spieler eine Sonderzahlung in Höhe von 5000 €. Werden genau zwei der ersten drei Spiele gewonnen, werden jeweils 2000 € ausgezahlt. Wird höchstens ein Spiel gewonnen, muss jeder Spieler eine Strafzahlung in Höhe von 1000 € leisten. (Unentschiedene Spiele gelten als nicht gewonnen.) Die Spieler gehen davon aus, dass sich ihre Siegchancen im Vergleich zur letzten Saison nicht verändert haben und auch in der neuen Saison zunächst gleich bleiben.

4.1 Die Zufallsgröße $X$ beschreibt die Anzahl der von den ersten drei Spielen gewonnenen Spiele. Begründen Sie kurz, dass diese Zufallsgröße binomialverteilt ist.

4.2 Die Zufallsgröße $Y$ beschreibt den Gewinn bzw. Verlust für einen Spieler. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße $Y$.

4.3 Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße $Y$. Sollten sich die Spieler auf das Angebot einlassen? Begründen Sie Ihre Aussage.

# L ö s u n g e n

## 1. Umfrage unter den Spielern

### 1.1 Vierfeldertafel
**2,0 Punkte**

| | $S$ | $\overline{S}$ | |
|---|---|---|---|
| $G$ | ***12*** | ***7*** | 19 |
| $\overline{G}$ | 3 | 6 | 9 |
| | ***15*** | ***13*** | 28 |

S: Stammspieler S
G: Gutes Verhältnis zum Trainer

(Gegebene Anzahlen sind fett und kursiv gedruckt.)

### 1.2 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten anhand der Vierfeldertafel
**3,5 Punkte**

- $P(G) = \frac{19}{28} \approx 67{,}9\%$
- $P(\overline{S} \cap \overline{G}) = \frac{6}{28} \approx 21{,}4\%$
- $P_G(S) = \frac{P(S \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{12}{28}}{\frac{19}{28}} = \frac{12}{19} \approx 63{,}2\%$

## 2. Veränderung der Aufstellung

### 2.1 1-4-4-2-System
**2,0 Punkte**

Anzahl der Möglichkeiten: $\underset{\text{Torwart}}{\underset{\uparrow}{\binom{3}{1}}} \cdot \underset{\text{Abwehr}}{\underset{\uparrow}{\binom{9}{4}}} \cdot \underset{\text{Mittelfeld}}{\underset{\uparrow}{\binom{12}{4}}} \cdot \underset{\text{Sturm}}{\underset{\uparrow}{\binom{4}{2}}} = 1\,122\,660$

### 2.2 Veränderung der Positionen in der Abwehr
**1,0 Punkte**

Anzahl der Möglichkeiten: $4! = 24$

## 3. „Elfmeter“

### 3.1 Elfmeterschütze David
**1,0 Punkte**

Wahrscheinlichkeit: $P$(„4 Treffer bei 4 Schüssen“) $= 0{,}8^4 \approx 41\%$

### 3.2 Elfmeterschütze Robert
**3,0 Punkte**

Es liegt eine Bernoullikette der Länge $n = 5$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}6$ vor. Robert muss zum Waldlauf, wenn die Trefferzahl kleiner als 4 ist.

$$P(T < 4) = 1 - P(T \geq 4) = 1 - (\, P(T = 4) + P(T = 5)\,)$$
$$= 1 - \left( \binom{5}{4} \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^1 + \binom{5}{5} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^0 \right)$$
$$= 1 - (\,0{,}2592 + 0{,}0778\,) \approx 66{,}3\%$$

**3.3 Elfmeterschütze Thomas** **3,0 Punkte**

Gesucht ist die Trefferwahrscheinlichkeit aus der Bedingung:

$$P(\mathrm{T} = 5) \geq 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad \binom{5}{5} \cdot p^5 \cdot q^0 \geq 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad p^5 \geq 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \quad p \geq \sqrt[5]{0{,}9} \approx 0{,}979$$

Seine Trefferwahrscheinlichkeit müsste bei mindestens 97,9% liegen.

## 4. Angebot an die Spieler

**4.1 Begründung für die Binomialverteilung** **1,0 Punkte**

Es liegt ein Bernoulli-Experiment mit zwei möglichen Ausgängen $g$ und $\overline{g}$ vor. Dieses Bernoulli-Experiment wird bei gleich bleibender Gewinnwahrscheinlichkeit wiederholt. Die Spielergebnisse sind voneinander unabhängig. Es liegt eine Bernoulli-Kette vor.

Die Zufallsgröße $X$ ist daher binomialverteilt.

**4.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße *Y*, die den Gewinn bzw. Verlust für einen Spieler beschreibt** **6,0 Punkte**

Deutung: Bernoullikette der Länge $n = 3$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{10}{34} = \frac{5}{17}$.

Es gilt: $P(Y \leq 1) = P(\mathrm{T} = 0) + P(\mathrm{T} = 1) = \binom{3}{0} \cdot (\frac{5}{17})^0 \cdot (\frac{12}{17})^3 + \binom{3}{1} \cdot (\frac{5}{17})^1 \cdot (\frac{12}{17})^2$

$$\approx 0{,}3517 + 0{,}4397 = 0{,}7914$$

$$P(Y = 2) = P(\mathrm{T} = 2) = \binom{3}{2} \cdot (\frac{5}{17})^2 \cdot (\frac{12}{17})^1 \approx 0{,}1832$$

$$P(Y = 3) = P(\mathrm{T} = 3) = \binom{3}{3} \cdot (\frac{5}{17})^3 \cdot (\frac{12}{17})^0 \approx 0{,}0254$$

Damit ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

| Siege (S) | 0 oder 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $y$ | – 1000 € | + 2000 € | + 5000 € |
| $P(Y = y)$ | 0,7914 | 0,1832 | 0,0254 |

**4.3 Erwartungswert** **2,5 Punkte**

Für den Erwartungswert von $Y$ ergibt sich:

$$\mathrm{E}(Y) = -1000 \cdot 0{,}7914 + 2000 \cdot 0{,}1832 + 5000 \cdot 0{,}0254 \approx -298$$

Die Spieler sollten das Angebot nicht annehmen.

*Hinweis:* Die Bedeutung des Erwartungswertes kann hier kritisch gesehen werden, da es sich bei dem Angebot des Vereins um ein einmaliges Angebot handelt. Bei mehrmaligen Wiederholungen unter gleichen Bedingungen würde jeder Spieler dabei im Mittel 298 Euro pro Serie verlieren.

Eine Ablehnung des Angebots kann auch mit der fast 80%-igen Wahrscheinlichkeit, 1000 Euro zu verlieren, begründet werden.

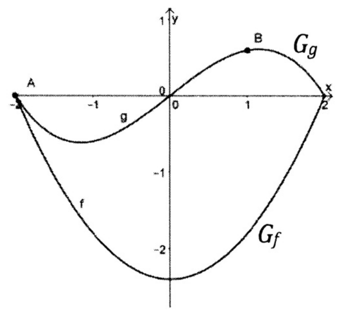
# Schriftliche Abiturprüfung 2014

## G-Kurs

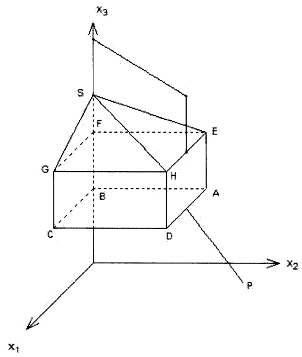
## Haupttermin

**Themenübersicht**

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung einer e-Funktion $f(x) = 2x^2 \cdot e^x$
  - Modellierung: Blumengartenbeet
    Betrachtung von $g(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{4}{5}x$
    als weitere Funktion
  - Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte




- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Modellierung: Baumhaus
  - Winkel zwischen Vektoren
  - Inhalt einer Dreiecksfläche
  - Abstand Gerade-Ebene




- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Erstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel (mit absoluten Werten)
  - Bernoulli-Kette
  - Erstellen eines Baumdiagramms
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert einer Zufallsgröße bestimmen


SOFTFRUTTI verlag
www.softfrutti.de

# Aufgabe 1
# ANALYSIS

**1.** Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2 \cdot \mathrm{e}^x$ .

1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f$.

1.2 Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms das Grenzverhalten der Funktion $f$ für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.

1.3 Zeigen Sie, dass die Gleichung der ersten Ableitung von $f$ wie folgt lautet:

$$f'(x) = 2\mathrm{e}^x \cdot (x^2 + 2x) \ .$$

1.4 Ermitteln Sie die Extremstellen der Funktion $f$.

(Hinweis: $f''(x) = (2x^2 + 8x + 4) \cdot \mathrm{e}^x$ kann bei Bedarf ohne weiteren Nachweis verwendet werden.)

1.5 Skizzieren Sie mit den bisherigen Ergebnissen den Verlauf des Graphen von $f$.

1.6 Den Graphen der Funktion $g$ erhält man aus dem Graphen der Funktion $f$, indem man diesen zuerst an der $x$-Achse spiegelt, dann um +2 Einheiten entlang der $y$-Achse verschiebt.

1.6.1 Geben Sie eine Funktionsgleichung der Funktion $g$ an.

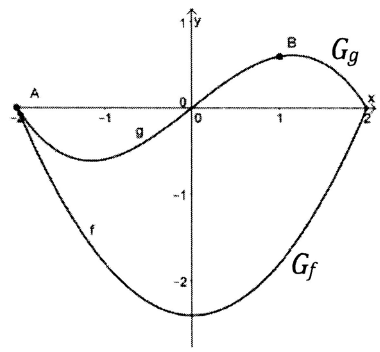
1.6.2 Begründen Sie ohne eine Rechnung durchzuführen, dass die Graphen der Ableitungsfunktionen $f'$ und $g'$ dieselben Nullstellen haben.

**2.** Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f$ mit

$$f(x) = \tfrac{3}{5}x^2 - \tfrac{12}{5}$$

sowie den Graphen der Funktion $g$ mit

$$g(x) = -\tfrac{1}{5}x^3 + \tfrac{4}{5}x \ .$$




2.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f$.

2.2 Bestimmen Sie die Wendestelle von $g$ und zeigen Sie, dass die Wendestelle der Funktion $g$ zugleich auch eine Nullstelle von $g$ ist.

2.3 Die beiden Funktionsgraphen umranden über dem Intervall [–2 ; 2] eine Figur, welche einem Vogel ähnelt. Im Rahmen einer Landesgartenschau soll ein Beet in Form dieser Figur angelegt werden.

2.3.1 Begründen Sie ohne Rechnung, dass das Maß $\mu$ der Fläche des Blumenbeetes bestimmt werden kann durch $\mu(A) = \left| \int_{-2}^{2} f(x)\, dx \right|$ .

2.3.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Beetes in Quadratmetern. (1 Längeneinheit entspricht 5m).

2.4 Durch die Punkte $A(-2 \mid 0)$ und $B(1 \mid g(1))$ verläuft ein geradliniger Weg.

2.4.1 Ermitteln Sie eine Geradengleichung, die den Verlauf dieses Weges beschreibt.

2.4.2 Parallel zu diesem Weg verläuft ein zweiter Weg, der das Beet aus 2.3 in genau einem Punkt berührt. Berechnen Sie die $x$-Koordinate dieses Berührpunktes.

# L ö s u n g e n

## 1. Untersuchung einer e-Funktion *f*

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 2x^2 \cdot \mathrm{e}^x$ .

### 1.1 Nullstelle **1,5 Punkte**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 \cdot \mathrm{e}^x$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \quad (\mathrm{e}^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{(doppelt)}$$

### 1.2 Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ **2,0 Punkte**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\big(\underbrace{(2x^2)}_{\downarrow\,+\infty}\cdot\underbrace{(\mathrm{e}^x)}_{\downarrow\,0^+}\big) = 0^+ \quad \text{(Die e-Funktion dominiert.)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\big(\underbrace{(2x^2)}_{\downarrow\,+\infty}\cdot\underbrace{(\mathrm{e}^x)}_{\downarrow\,+\infty}\big) = +\infty \quad \text{(Beide Faktoren streben gegen } +\infty.\text{)}$$

### 1.3 Ableitung **1,5 Punkte**

$$f'(x) = 4x \cdot \mathrm{e}^x + 2x^2 \cdot \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x \cdot (x^2 + 2x)$$

### 1.4 Extremstellen **4,0 Punkte**

- *Notwendige Bedingung* (2,0 P)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^x \cdot (x^2 + 2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x \cdot (x+2) = 0 \quad (\mathrm{e}^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$
(beide mit Vzw.)

- *Hinreichende Bedingung* (2,0 P)

Vorzeichentabelle:

| $x$ | | $-2$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| | | mit Vzw. | | mit Vzw. | |
| | | HP | | TP | |

Testwert:

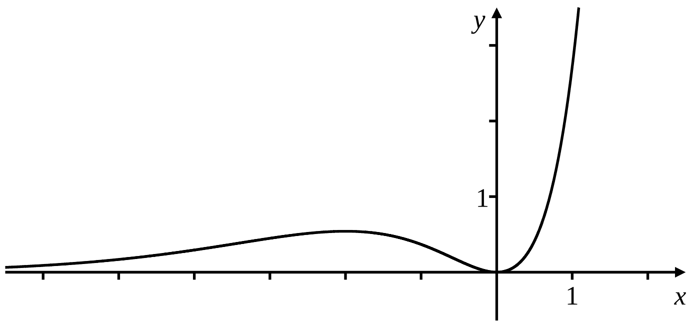
$f'(1) = 6\mathrm{e} > 0$

Ergebnis: $-2$ ist lokale Maximumstelle
$0$ ist lokale Minimumstelle

(Gemäß Aufgabenstellung sind nur die Stellen, nicht aber die Funktionswerte gefragt.)

<u>Alternative</u>: Argumentation mithilfe der angegebenen zweiten Ableitung
Es gilt $f''(-2) = -4\mathrm{e}^{-2} < 0$ und $f''(0) = 4 > 0$.

### 1.5 Graph **2,5 Punkte**




### 1.6 Betrachtung der Funktion *g*

### 1.6.1 Funktionsgleichung von *g* **1,0 Punkte**

Die Funktion $f(x) = 2x^2 \cdot e^x$ wird der Reihe nach wie folgt verändert:

- Spiegelung an der *x*-Achse: $2x^2 \cdot e^x \rightarrow -2x^2 \cdot e^x$
- Verschiebung in *y*-Richtung: $-2x^2 \cdot e^x \rightarrow -2x^2 \cdot e^x + 2$

Die gesuchte Gleichung lautet: $g(x) = -2x^2 \cdot e^x + 2$

### 1.6.2 Gleiche Nullstellen der Graphen von $f'$ und $g'$ **2,0 Punkte**

Die Nullstellen der Graphen einer Ableitungsfunktion sind mögliche Extremstellen der Funktion. Da die Funktion *f* zwei Extremstellen besitzt, hat der Graph von $f'$ dort eine Nullstelle.
Durch Spiegelung an der *x*-Achse und Verschiebung entlang der *y*-Achse verändert sich die Lage der Extremstelle aber nicht, also bleiben auch die Nullstellen der Ableitungsfunktion dieselben.

## 2. Betrachtung zweier ganzrationaler Funktionen

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{12}{5}$ und $g(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{4}{5}x$ .

### 2.1 Nullstellen von *f* **2,0 Punkte**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x^2 - \frac{12}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}(x^2 - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}(x+2)(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \qquad \text{(beide einfach)}$$

### 2.2 Wendestelle von *g* und zugleich auch Nullstelle von *g* **3,0 Punkte**

- *Ableitungen* (1,0 P)

  $g'(x) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ ; $g''(x) = -\frac{6}{5}x$

- *Untersuchung auf Wendepunkte* (2,0 P)
  - Notwendige Bedingung: $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (einfach, mit Vzw.)
  - Hinreichende Bedingung: $x = 0$ ist Nullstelle von $g''$ mit Vzw., also Wendestelle

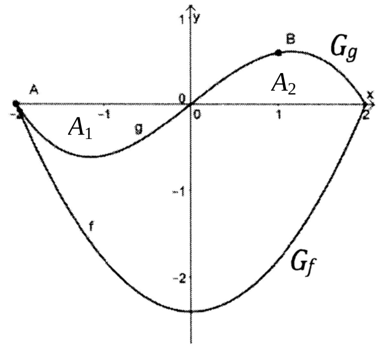
    (<u>Alternative</u>: $g'''(0) = -\frac{6}{5} \neq 0$)
  - Funktionswert: $g(0) = -\frac{1}{5} \cdot 0^3 + \frac{4}{5} \cdot 0 = 0$ ; also Wendepunkt $W(0 \mid 0)$

Die Wendestelle $x = 0$ ist also zugleich auch Nullstelle.

## 2.3 Vogelähnliche Figur

### 2.3.1 Begründung des Integralansatzes **2,0 Punkte**

- Da der Graph der Funktion $g$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist sind die Maße der eingeschlossenen Flächen $A_1$ und $A_2$ zwischen der $x$-Achse und dem Graphen von $g$ im Intervall $[-2\,;\,0]$ bzw. $[0\,;\,2]$ gleich sind.
- Das Maß der Fläche des betrachteten Beetes entspricht daher dem Maß der von der Parabel $f$ und der $x$-Achse eingeschlossenen Fläche im Intervall $[-2\,;\,2]$.
- Da der Graph von $f$ unterhalb der $x$-Achse verläuft, muss der Betrag des Integrals berechnet werden.




### 2.3.2 Flächenberechnung **4,0 Punkte**

$$\mu(A) = \left| \int_{-2}^{2} f(x)\, dx \right|$$

$$= 2 \cdot \left| \int_{0}^{2} f(x)\, dx \right| \qquad \text{(Ausnützen der Achsensymmetrie von } f\text{)}$$

$$= 2 \cdot \left| \int_{0}^{2} \left( \tfrac{3}{5}x^2 - \tfrac{12}{5} \right) dx \right| \qquad \text{(Funktionsterm für } f \text{ einsetzen)}$$

$$= 2 \cdot \left| \left[ \tfrac{1}{5}x^3 - \tfrac{12}{5}x \right]_0^2 \right| \qquad \text{(Stammfunktion bilden)}$$

$$= 2 \cdot \left| \left( \tfrac{1}{5}\cdot 8 - \tfrac{12}{5}\cdot 2 \right) - 0 \right| = 2 \cdot \left| -\tfrac{16}{5} \right| = \tfrac{32}{5} = 6{,}4 \ \text{(FE)}$$

Eine Flächeneinheit entspricht $5\text{m} \cdot 5\text{m} = 25\text{m}^2$.

Das Maß der Fläche des Beetes beträgt damit $6{,}4 \cdot 25\text{m}^2 = 160\text{m}^2$.

## 2.4 Geradliniger Weg durch die Punkte $A(-2 \mid 0)$ und $B(1 \mid g(1))$

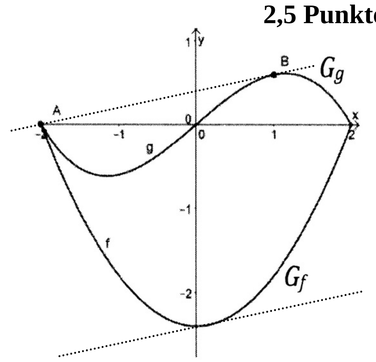
### 2.4.1 Geradengleichung für den Weg durch $A$ und $B$ **2,5 Punkte**

Es gilt: $g(1) = -\frac{1}{5}\cdot 1^3 + \frac{4}{5}\cdot 1 = \frac{3}{5}$.

Steigung: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\frac{3}{5} - 0}{1-(-2)} = \dfrac{1}{5}$

Punktsteigungsform: $y = m \cdot (x - x_1) + y_1$

$$y = \tfrac{1}{5} \cdot (x + 2) + 0 = \tfrac{1}{5}x + \tfrac{2}{5}$$

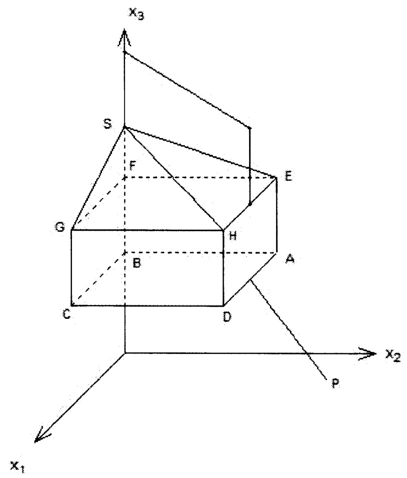



### 2.4.2 Zweiter Weg, der das Beet in genau einem Punkt berührt **2,0 Punkte**

Parallelität bedeutet, dass der zweite Weg die gleiche Steigung $\frac{1}{5}$ besitzt. Die zugehörige Gerade soll Tangente an den Graphen von $f$ sein.

Dies führt zu dem Ansatz: $f'(x) = \frac{1}{5} \;\Leftrightarrow\; \frac{6}{5}x = \frac{1}{5} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{6}$

# Aufgabe 2
# ANALYTISCHE GEOMETRIE




Paul hat seinem kleinen Bruder ein Baumhaus gebaut. Dieses setzt sich aus einem quaderförmigen Raum mit einem aufgesetzten Dach zusammen.

Das Grundstück liegt in der Skizze in der $x_1$-$x_2$-Ebene und der Fuß des Baumes steht im Ursprung des Koordinatensystems.

Gegeben sind die Punkte
$A(0 \mid 3 \mid 2)$ , $B(0 \mid 0 \mid 2)$ , $D(1{,}5 \mid 3 \mid 2)$ ,
$F(0 \mid 0 \mid 3{,}5)$ , $G(1{,}5 \mid 0 \mid 3{,}5)$ , $H(1{,}5 \mid 3 \mid 3{,}5)$ und
$S(0 \mid 0 \mid 4{,}5)$.

**1.** Geben Sie die Koordinaten der Punkte $C$ und $E$ an. Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Kante $\overline{AD}$.

**2.** Paul möchte die Dachfläche $GHS$ zum Schutz mit einer Folie überziehen. Dazu benötigt er einige Informationen.

2.1 Bestimmen Sie das Maß des Innenwinkels $\sphericalangle SHG$ der Dachfläche.

2.2 Berechnen Sie die Länge der Dachkante $\overline{HS}$.

2.3 Begründen Sie, dass die Dachkanten $\overline{GS}$ und $\overline{GH}$ senkrecht aufeinander stehen. Berechnen Sie das Maß des Flächeninhalts der Dachfläche $GHS$.

**3.** Vom Punkt $P(0{,}75 \mid 4 \mid 0)$ aus wurde eine Kletterstange an der Kante $\overline{AD}$ des Baumhauses befestigt, deren Richtung durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

3.1 Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die die Lage der Kletterstange beschreibt.

3.2 Prüfen Sie, ob die Kletterstange im Mittelpunkt der Kante $\overline{AD}$ am Baumhaus befestigt wurde.

**4.** Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene $e$, in der die Dachfläche $ESH$ liegt und ermitteln Sie daraus eine Gleichung der Ebene in Koordinatenform.
Zur Kontrolle und zur weiteren Verwendung: $e:\ x_2 + 3x_3 = 13{,}5$

**5.** Paul hat über der Dachfläche $ESH$ ein Seil zwischen dem Baum und einem Mast am Baumhaus gespannt, an dem er die Fahne seines Lieblingsfußballvereins aufhängen möchte. Der Verlauf des Seils wird beschrieben durch die Geradengleichung

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

5.1 Zeigen Sie, dass das Seil parallel zur Dachfläche $ESH$ verläuft.

5.2 Berechnen Sie den Abstand des Seils von der Dachfläche $ESH$.

# L ö s u n g e n

**1. Koordinaten der Punkte $C$ und $E$ sowie Mittelpunkt der Kante $\overline{AD}$** **2,0 Punkte**

Abgelesene Punkte: $C(1{,}5 \mid 0 \mid 2)$ ($x_1$- und $x_3$-Koordinaten wie $D$, $x_2$-Koordinate wie $A$)
$E(0 \mid 3 \mid 3{,}5)$ ($x_1$- und $x_2$-Koordinaten wie $A$, $x_3$-Koordinate wie $F$)

Mittelpunkt: $$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{d}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1{,}5\\3\\2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0{,}75\\3\\2\end{pmatrix} \quad ; \quad M(0{,}75 \mid 3 \mid 2)$$

**2. Folie zum Schutz der Dachfläche $GHS$**

**2.1 Maß des Innenwinkels $\sphericalangle SHG$ der Dachfläche** **2,0 Punkte**

$H$ ist der Scheitel des Winkel $\sphericalangle SHG$. Der Winkel wird also gebildet z. B. von den Vektoren $\overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{HS}$. Nach der Winkelformel gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{HS}}{\left|\overrightarrow{HG}\right| \cdot \left|\overrightarrow{HS}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1{,}5\\-3\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-1{,}5\\-3\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{9}{3 \cdot 3{,}5} = \frac{6}{7} \approx 0{,}8571$$

Damit folgt: $\alpha \approx 31{,}00°$.

**2.2 Länge der Dachkante $\overline{HS}$** **0,5 Punkte**

$$|\overrightarrow{HS}| = |\vec{s} - \vec{h}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\4{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1{,}5\\3\\3{,}5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1{,}5\\-3\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + (-3)^2 + 1^2} = 3{,}5 \text{ (LE)}$$

**2.3 Dachkanten $\overline{GS}$ und $\overline{GH}$ und Flächenmaß der Dachfläche $GHS$** **2,0 Punkte**

- *Orthogonalität* (1,0 P)

  Es gilt: $$\overrightarrow{GS} \cdot \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix}-1{,}5\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = 0.$$

  Dies bedeutet $\overrightarrow{GS} \perp \overrightarrow{GH}$. Die Kanten $\overline{GS}$ und $\overline{GH}$ stehen senkrecht aufeinander.

- *Flächenmaß* (1,0 P)

  $$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{HG} \times \overrightarrow{HS}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1{,}5\\-3\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}-3\\0\\-4{,}5\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29{,}25} \approx 2{,}70 \text{ (FE)}$$

  <u>Alternative</u>*:* (elementargeometrisch als Dreieck mit rechtem Winkel bei $G$)

  $$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{GS}| \cdot |\overrightarrow{GH}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}-1{,}5\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3{,}25} \cdot 3 \approx 2{,}70 \text{ (FE)}$$

## 3. Kletterstange an der Kante $\overline{AD}$

### 3.1 Gleichung der Geraden, die die Lage der Kletterstange beschreibt **1,0 Punkte**

Gerade $h$: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

### 3.2 Befestigung der Kletterstange im Mittelpunkt der Kante $\overline{AD}$ **1,0 Punkte**

Punktprobe für $M(0,75 \mid 3 \mid 2)$ in der Gleichung von $h$:

$$\begin{pmatrix} 0,75 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichung wird für $\lambda = 1$ erfüllt, d.h. es gilt $M \in g$.

<u>Alternative</u>: Nachweis, dass $\overrightarrow{MP}$ und $\vec{v}$ kollinear sind.

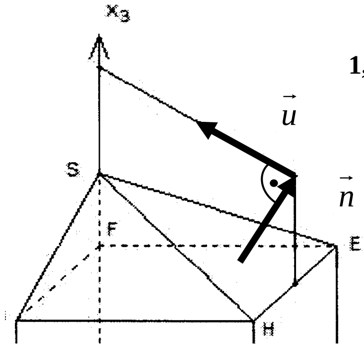
## 4. Parameter- und Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche *ESH* liegt **3,0 Punkte**

- *Parametergleichung* (1,0 P)
  - Richtungsvektoren: $\overrightarrow{SH} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{u}$

    $\overrightarrow{SE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{w}$
  - Parametergleichung: $e$: $\vec{x} = \vec{s} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
- *Koordinatengleichung* (2,0 P)
  - Normalenvektor: $\overrightarrow{SH} \times \overrightarrow{SE} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
  - Normalengleichungen:
    - Punktnormalengleichung: $e$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} \right) = 0$
    - Allgemeine Normalengleichung: $e$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 13,5 = 0$
    - Koordinatengleichung: $e$: $x_2 + 3x_3 = 13,5$

## 5. Mast am Baumhaus

### 5.1 Seil parallel zur Dachfläche *ESH*




**1,5 Punkte**

Für den Richtungsvektor $\vec{u}$ von $g$ (Seil) und den Normalenvektor $\vec{n}$ von $e$ (Dachfläche) gilt:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 + 12 - 12 = 0 .$$

Dies bedeutet $\vec{u} \perp \vec{n}$ und damit die Parallelität von Seil und zur Dachfläche.

### 5.2 Abstand des Seils zur Dachfläche

**2,0 Punkte**

Gesucht ist der Abstand der Seilgeraden $g$ von der Dachebene $e$. Da $g$ und $e$ parallel sind, genügt es den Abstand eines Punktes von $g$ (z. B. des Aufpunkts $A_g(0 \mid 0 \mid 6) \in g$) zu der Ebene $e$ zu berechnen.

*1. Möglichkeit*: Verwendung der Abstandsformel

Abstandsformel: $d(g\,;e) = d(A_g\,;e) = \left| \vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{SA_g} \right| = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{SA_g} \right|$

Dabei gilt: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$$\overrightarrow{SA_g} = \vec{a}_g - \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich: $d(g\,;e) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot |4{,}5| \approx 1{,}42$ (LE) .

*2. Möglichkeit*: Anwendung der Lotgeradenmethode

Ebene $e$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 13{,}5 = 0$

Lotgerade $l$: $\vec{x} = \vec{a}_g + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] - 13{,}5 = 0 \Leftrightarrow 18 + 10\lambda - 13{,}5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -0{,}45$$

(Die konkrete Berechnung der Koordinaten des Lotfußpunkts $L$ ist nicht unbedingt erforderlich. Der gesuchte Abstand ergibt schon allein aus dem Parameterwert $\lambda = -0{,}45$)

Es folgt: $\left| \overrightarrow{A_g L} \right| = \left| \vec{l} - \vec{a}_g \right| = |-0{,}45 \cdot \vec{n}| = 0{,}45 \cdot |\vec{n}| = 0{,}45 \cdot \sqrt{10} \approx 1{,}42$

# Aufgabe 3
# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

**1.** In einer Schule mit 450 Schülern ist unter allen Schülern eine Umfrage über das Tragen von Mützen im Unterrichtsraum und das Trinken während des Unterrichts durchgeführt worden. Dabei haben sich 50 Schüler für ein Verbot der Mützen und 25 Schüler für ein Trinkverbot ausgesprochen. 20 Schüler haben sich für beide Verbote entschieden.

Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

M: Der Schüler hat für das Mützenverbot gestimmt.

T: Der Schüler hat für das Trinkverbot gestimmt.

1.1 Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten dar.

1.2 Ein Schüler wird zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

1.2.1 Der Schüler möchte, dass das Tragen von Mützen im Unterricht erlaubt wird.

1.2.2 Der Schüler hat für mindestens ein Verbot gestimmt.

1.2.3 Der Schüler hat für genau ein Verbot gestimmt.

1.2.4 Ein Schüler, der für das Mützenverbot gestimmt hat, ist auch für das Trinkverbot.

**1.3** Es werden zufällig 20 Schüler ausgewählt und über ihre Angaben in der Umfrage interviewt.

1.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den befragten Schülern niemand für das Mützenverbot gestimmt hat.

1.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den befragten Schülern mindestens zwei Schüler für das Mützenverbot gestimmt haben.

**2.** Auf einem Jahrmarkt wird ein Gewinnspiel mit einem Glücksrad angeboten. Das Glücksrad besteht aus drei unterschiedlich großen Sektoren in den Farben grün, rot und blau. Die Sektoren haben in dieser Reihenfolge die Mittelpunktswinkel 45°, 135° und 180°. Pro Spiel dreht man das Glücksrad zweimal.

2.1 Stellen Sie diesen Sachverhalt in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm dar.

2.2 Der Einsatz beträgt 1€ pro Spiel. Eine Auszahlung erfolgt, wenn man zweimal die gleiche Farbe dreht: bei zweimal grün werden 4€, bei zweimal rot werden 2€ und bei zweimal blau wird 1€ ausbezahlt. In allen anderen Fällen bekommt man nichts ausbezahlt. Die Zufallsgröße $X$ beschreibt den Gewinn oder Verlust des Spielers.

2.2.1 Geben Sie die Werte an, die die Zufallsgröße $X$ annehmen kann.

2.2.2 Eine Person versucht sich an diesem Gewinnspiel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Person mit einem Verlust rechnen muss.

2.2.3 Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße $X$.

# L ö s u n g e n

## 1. Umfrage unter den Schülern einer Schule

### 1.1 Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten **2,0 Punkte**

Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

M: Der Schüler hat für das Mützenverbot gestimmt.

T: Der Schüler hat für das Trinkverbot gestimmt.

| | M | $\overline{\text{M}}$ | |
|---|---|---|---|
| T | 20 | ***5*** | 25 |
| $\overline{\text{T}}$ | ***30*** | ***395*** | ***425*** |
| | 50 | ***400*** | 450 |

### 1.2 Auswahl eines Schülers

#### 1.2.1 Schüler möchte, dass das Tragen von Mützen erlaubt wird. **0,5 Punkte**

$P(\overline{\text{M}}) = \frac{400}{450} = 0{,}\overline{8}$ (Werte aus Vierfeldertafel abgelesen)

#### 1.2.2 Schüler hat für mindestens ein Verbot gestimmt. **1,0 Punkte**

$P(\text{M} \cup \text{T}) = 1 - \text{P}(\overline{\text{M}} \cap \overline{\text{T}}) = 1 - \frac{395}{450} = \frac{55}{450} = 0{,}1\overline{2}$

<u>Alternative</u>: Wahrscheinlichkeiten zu drei Feldern aus der Tafel bestimmen:

$P(\text{M} \cup \text{T}) = \frac{20}{450} + \frac{5}{450} + \frac{30}{450} = \frac{55}{450} = 0{,}1\overline{2}$

#### 1.2.3 Schüler hat für genau ein Verbot gestimmt. **1,0 Punkte**

$P((\text{M} \cap \overline{\text{T}}) \cup (\overline{\text{M}} \cap \text{T})) = P(\text{M} \cap \overline{\text{T}}) + P(\overline{\text{M}} \cap \text{T}) = \frac{30}{450} + \frac{5}{450} = \frac{35}{450} = 0{,}0\overline{7}$

#### 1.2.4 Schüler, der für das Mützenverbot gestimmt hat, ist auch für das Trinkverbot. **1,5 Punkte**

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist: T (Abstimmung für das Trinkverbot)

Bedingung: M (Abstimmung für das Mützenverbot)

Damit ergibt sich:

$P_{\text{M}}(\text{T}) = \frac{P(\text{T} \cap \text{M})}{P(\text{M})} = \frac{\frac{20}{450}}{\frac{50}{450}} = \frac{20}{50} = 0{,}4$ ( oder: $P_{\text{M}}(\text{T}) = \frac{|\text{T} \cap \text{M}|}{|\text{M}|} = \frac{20}{50} = 0{,}4$ )

### 1.3 Zufällige Auswahl von Schülern

Interpretation: Bernoullikette der Länge $n = 20$

Treffer T: „Schüler stimmt für das Mützenverbot.“ mit $p = \frac{1}{9}$

#### 1.3.1 Niemand hat für das Mützenverbot gestimmt. **1,0 Punkte**

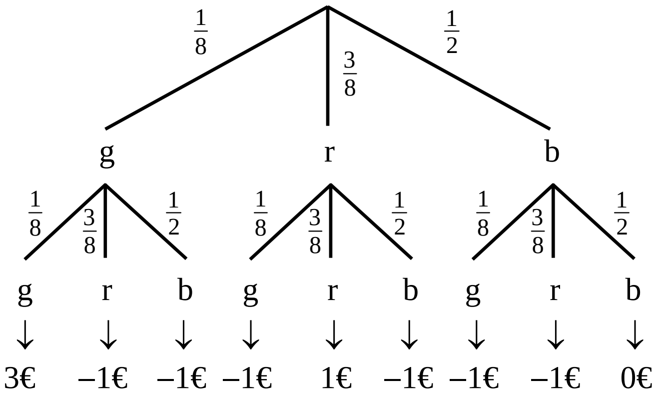
$P(T = 0) = \binom{20}{0} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^0 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{20} \approx 0{,}0948$

**1.3.1 Mindestens zwei Schüler haben für das Mützenverbot gestimmt.** **2,0 Punkte**

$$P(T \geq 2) = 1 - P(T < 2) = 1 - P(T \leq 1) = 1 - P(T = 1) - P(T = 0)$$
$$= 1 - \binom{20}{1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{19} - \binom{20}{0} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^0 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{20}$$
$$= 1 - 0{,}2371 - 0{,}0948$$
$$\approx 0{,}6681$$

## 2. Umfrage unter den Schülern einer Schule

**2.1 Baumdiagramm** **2,0 Punkte**




← Gewinn / Verlust

$45°$: $P(\text{g}) = \frac{45°}{360°} = \frac{1}{8}$

$135°$: $P(\text{r}) = \frac{135°}{360°} = \frac{3}{8}$

$180°$: $P(\text{b}) = \frac{180°}{360°} = \frac{1}{2}$

**2.2 Zufallsgröße *X* zur Beschreibung des Gewinns oder Verlusts des Spielers**

Die Zufallsgröße $X$ beschreibt den Gewinn oder Verlust des Spielers.

**2.2.1 Werte an, die die Zufallsgröße *X* annehmen kann** **1,0 Punkte**

Wertemenge: $X(\omega) = \{-1\,;\,0\,;\,1\,;\,3\}$ (vgl. auch letzte Zeile im Baumdiagramm)

**2.2.2 Wahrscheinlichkeit, mit der die Person mit einem Verlust rechnen muss** **1,5 Punkte**

Am günstigsten argumentiert man über das Gegenereignis:

$$P(X = -1) = 1 - (\,P(X = 3) + P(X = 1) + P(X = 0)\,)$$
$$= 1 - \left( \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) = \frac{19}{32} \approx 0{,}5938$$

**2.2.3 Erwartungswert der Zufallsgröße *X*** **1,5 Punkte**

Aus dem Baudiagramm folgt weiter:

$$P(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad ; \quad P(X = 1) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64} \quad ; \quad P(X = 3) = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{19}{32}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |

Erwartungswert: $E(X) = -1 \cdot \frac{19}{32} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{9}{64} + 3 \cdot \frac{1}{64} \approx -0{,}41$

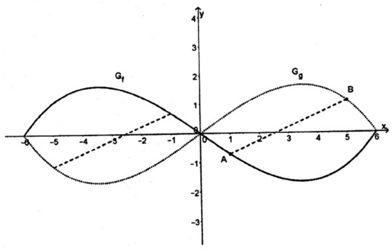
# Schriftliche Abiturprüfung 2014

## G-Kurs

## Nachtermin

### Themenübersicht

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung einer ganzrationalen Funktion $f(x)=\frac{1}{50}x^3-\frac{18}{25}x$
  - Modellierung: Querschnitt Propeller
  - Untersuchung der gebrochenrationalen Funktion $f(x)=\frac{2x^2-2x-12}{x^2-4x+4}=\frac{2\cdot(x-3)\cdot(x+2)}{(x-2)^2}=2+\frac{6x-20}{x^2-4x+4}$
  - Untersuchen der ln-Funktion $f(x)=\ln(x-4)-3$




- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Modellierung: Geocache
  - Innenwinkel bei einem Dreieck
  - Abstand Punkt-Gerade

- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Erstellen und Auswerten eines Baumdiagramms
  - Bernoulli-Kette
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert einer Zufallsgröße bestimmen


SOFTFRUTTI verlag
www.softfrutti.de

# Aufgabe 1
# ANALYSIS

**1.** Gegeben ist die Funktion $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{50}x^3 - \frac{18}{25}x$ .

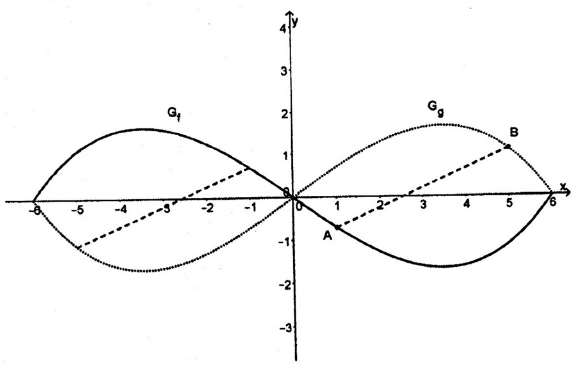
1.1 Untersuchen Sie die Funktion *f* auf Symmetrie und berechnen Sie die Nullstellen.

1.2 Ermitteln Sie die Extremstellen des Graphen der Funktion *f*.

1.3 Die Graphen der Funktionen *f* und *g* stellen bei Einschränkung der Definitionsmengen auf das Intervall [–6 ; 6] geeignete Randfunktionen für den Querschnitt eines Propellers dar.

(1 Längeneinheit entspricht 1cm.)

Der Graph der Funktion *g* entsteht durch Spiegelung des Graphen der Funktion *f* an der *x*-Achse.




1.3.1 Der Propeller eines Modellflugzeuges hat im Original eine Spannweite von 12cm sowie eine Flügelhöhe von ca. 3,3cm. Begründen Sie dies anhand der Eigenschaften der Funktionen *f* und *g*.

1.3.2 Berechnen Sie unter Angabe eines Integralansatzes und einer Stammfunktion den Flächeninhalt des betrachteten Querschnitts des Propellers.

1.3.3 Zur Verzierung des Propellers werden auf den Flügeln Streifen angebracht. Ein Streifen verläuft von $A(1\,|\,f(1))$ nach $B(5\,|\,f(5))$. Berechnen Sie die Länge dieses Streifens.

**2.** Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{2x^2-2x-12}{x^2-4x+4} = \frac{2\cdot(x-3)\cdot(x+2)}{(x-2)^2} = 2 + \frac{6x-20}{x^2-4x+4} \ .$$

2.1 Geben Sie die Definitionslücke und deren Art, die Nullstellen, den *y*-Achsenabschnitt und eine Gleichung der Asymptoten an.

2.2 Berechnen Sie den Schnittpunkt *S* des Graphen von *f* mit seiner Asymptote $f_A$.
[Zur Kontrolle: $S(\frac{10}{3}\ |\ 2)$]

2.3 Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen der Funktion *f* unter Einbeziehung der bisherigen Ergebnisse.

**3.** Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(x-4) - 3$ .

3.1 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von *f*.

3.2 Bestätigen Sie rechnerisch, dass der Graph der Funktion *f* keine Extremstellen und keine Wendestellen besitzt. [Zur Kontolle: $f''(x) = -\frac{1}{(x-4)^2}$]

3.3.1 Begründen Sie, dass die Funktion *f* eine Umkehrfunktion besitzt.

3.3.2 Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Umkehrfunktion $f^{-1}$ von *f*.

# L ö s u n g e n

## 1. Untersuchung einer ganzrationalen Funktion *f*

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x)=\frac{1}{50}x^3-\frac{18}{25}x$ .

### 1.1 Symmetrie und Nullstellen — **3,5 Punkte**

- *Symmetrie* (1,5 P)

  $D=\mathbb{R}$ ist symmetrisch und für alle $x\in D$ gilt:

  $$f(-x)=\frac{1}{50}(-x)^3-\frac{18}{25}(-x) = -\frac{1}{50}x^3+\frac{18}{25}x=-f(x)$$

  Also besteht Punktsymmetrie zu Ursprung.

  <u>Alternative</u>: Die Funktion *f* ist als ganzrationale Funktion mit nur ungeraden Exponenten punktsymmetrisch zum Ursprung.

- *Nullstellen* (2,0 P)

  $$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{50}x^3-\frac{18}{25}x=0 \qquad |\cdot 50$$
  $$\Leftrightarrow x^3-36x=0$$
  $$\Leftrightarrow x\cdot(x+6)\cdot(x-6)=0$$
  $$\Leftrightarrow x=0 \lor x=-6 \lor x=6 \quad \text{(alle einfach)}$$

### 1.2 Extrempunkte — **4,0 Punkte**

- *Ableitung* (0,5 P)

  $$f'(x)=\frac{3}{50}x^2-\frac{18}{25}=\frac{3}{50}(x^2-12)=\frac{3}{50}\cdot(x+\sqrt{12})\cdot(x-\sqrt{12})$$

- *Notwendige Bedingung* (1,5 P)

  $$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{12} \lor x=\sqrt{12} \quad \text{(beide mit Vzw.)}$$

- *Hinreichende Bedingung* (1,0 P)

  Vorzeichentabelle:

| $x$ | | $-\sqrt{12}$ | 0 | $\sqrt{12}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| | | mit Vzw. | | ohne Vzw. | |
| | | HP | | TP | |

  Testwert:

  $$f'(0)=-\frac{18}{25}<0$$

- *Angabe der Extrempunkte* (1,0 P)

  Funktionswerte: $f(-\sqrt{12})=\frac{12}{25}\sqrt{12}$ ; $f(\sqrt{12})=-\frac{12}{25}\sqrt{12}$

  Extrempunkte: $H(-\sqrt{12} \mid \frac{12}{25}\sqrt{12})$ ; $T(\sqrt{12} \mid -\frac{12}{25}\sqrt{12})$

### 1.3.1 Begründung anhand der Eigenschaften von *f* und *g* — **2,0 Punkte**

Die Spannweite des Propellers vom 12 cm entspricht der Intervalllänge.
Die Höhe des Propellers entspricht aufgrund der Spiegelung des Graphen von *f* an der *x*-Achse dem doppelten Funktionswert des Hochpunktes, also $2\cdot\frac{12}{25}\sqrt{12}$ cm ≈ 3,3 cm.

**1.3.2 Flächeninhalt des Propellers** **3,0 Punkte**

Aufgrund der Symmetrie gilt:

$$\mu(A) = 4 \cdot \left| \int_0^6 f(x)\,dx \right| = 4 \cdot \left| \int_0^6 \left(\frac{1}{50}x^3 - \frac{18}{25}x\right) dx \right| = 4 \cdot \left| \left[\frac{1}{200}x^4 - \frac{9}{25}x^2\right]_0^6 \right|$$

$$= 4 \cdot \left| \left(\frac{1}{200}\cdot 6^4 - \frac{9}{25}\cdot 6^2\right) - 0 \right| = 4 \cdot \left| -\frac{162}{25} \right| = 25{,}92 \ \ (\text{cm}^2)$$

**1.3.3 Länge des Verzierungsstreifens** **3,0 Punkte**

Es gilt: $f(1) = \frac{1}{50}\cdot 1^3 - \frac{18}{25}\cdot 1 = -\frac{35}{50} = -0{,}7$ , also $A(1 \mid -0{,}7)$

$g(5) = -f(5) = -\left(\frac{1}{50}\cdot 5^3 - \frac{18}{25}\cdot 5\right) = \frac{55}{50} = \frac{11}{10} = 1{,}1$ , also $B(5 \mid 11)$

Länge des Streifens:

$$d(A\,;B) = \sqrt{(5-1)^2 + (1{,}1+0{,}7)^2} = \sqrt{19{,}24} \approx 4{,}4 \ \ (\text{cm})$$

**2. Untersuchung einer gebrochenrationalen Funktion *f***

Betrachtet wird die Funktion mit

$$f(x) = \frac{2x^2-2x-12}{x^2-4x+4} = \frac{2\cdot(x-3)\cdot(x+2)}{(x-2)^2} = 2 + \frac{6x-20}{x^2-4x+4}\ .$$

**2.1 Definitionslücke, Nullstellen, *y*-Achsensabschnitt und Asymptote** **3,0 Punkte**

Definitionslücke: 2 (Polstelle ohne Vorzeichenwechsel) (Ablesen aus 2. Term)

Nullstellen: $-2$ , 3 (beide mit Vorzeichenwechsel) (Ablesen aus 2. Term)

*y*-Achsenabschnitt: $\frac{-12}{4} = -3$ ($x = 0$ im 1. Term)

Asymptote: $f_A(x) = 2$ (Ablesen aus 3. Term)

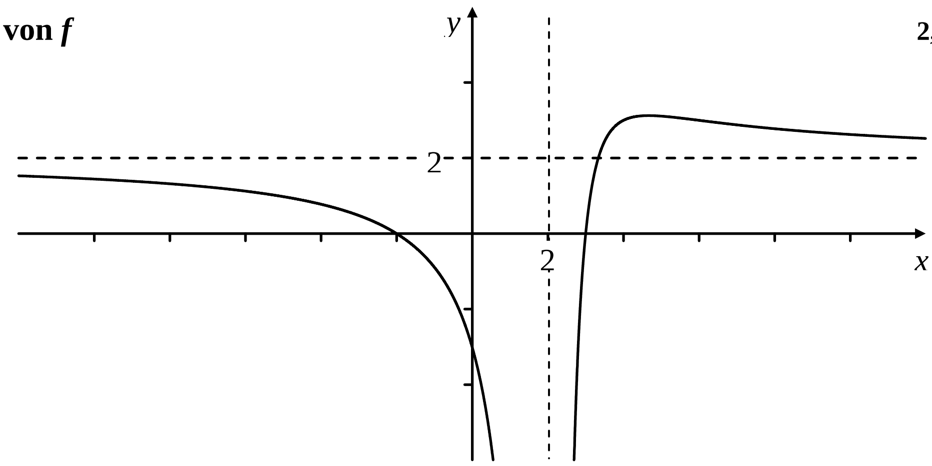
**2.2 Schnittpunkt des Graphen mit der Asymptote** **2,0 Punkte**

Aus dem 3. Term lässt sich der Restterm $r(x) = \frac{6x-20}{x^2-4x+4}$ ablesen.

Ansatz: $r(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x-20}{x^2-4x+4} \Leftrightarrow 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow 6x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$

Wegen $f(\frac{10}{3}) = 2$ ergibt sich der Schnittpunkt $S(\frac{10}{3} \mid 2)$.

**2.3 Graph von *f*** **2,5 Punkte**



## 3. Untersuchung einer ln-Funktion

Betrachtet wird die Funktion mit $f(x) = \ln(x-4) - 3$.

### 3.1 Definitionsmenge **1,0 Punkte**

Bedingung für den ln-Term: $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$

Damit folgt: $D_{max} = \,]4\,;+\infty[$

### 3.2 Keine Extrem- und Wendestellen **3,5 Punkte**

Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{x-4} = (x-4)^{-1}$ ; $f''(x) = -(x-4)^{-2} = -\frac{1}{(x-4)^2}$

Es gibt keine Nullstellen von $f'(x)$ und $f''(x)$, da die Zählerterme jeweils ungleich null sind. Daher gibt es weder Extrem- noch Wendestellen.

### 3.3.1 Begründung der Umkehrbarkeit **1,0 Punkte**

Es gilt $f'(x) = \frac{1}{x-4} > 0$ für alle $x \in D_{max}$. Dies bedeutet, dass $f$ in $D_{max}$ streng monoton wachsend und damit umkehrbar ist.

### 3.3.2 Gleichung der Umkehrfunktion **1,5 Punkte**

Funktionsgleichung für $f$: $y = \ln(x-4) - 3$.

Wir lösen die Funktionsgleichung nach $y$ auf:

$$\begin{aligned} y = \ln(x-4) - 3 \quad &\Leftrightarrow \quad y + 3 = \ln(x-4) && |\text{ Seiten vertauschen} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(x-4) = y + 3 && |\text{ e-Funktion anwenden} \\ &\Leftrightarrow \quad x - 4 = e^{y+3} && |\ +4 \\ &\Leftrightarrow \quad x = e^{y+3} + 4 \end{aligned}$$

Durch Vertaschen der Variablen ergibt sich als Funktionsgleichung der Umkehrfunktion:

$$f^{-1}(x) = e^{x+3} + 4$$

<u>Alternative</u>: Zuerst den Variablentausch duchführen und dann nach $y$ auflösen.

# Aufgabe 2
# ANALYTISCHE GEOMETRIE

Geocaching ist eine Art elektronischer Schatzsuche, bei der mittels GPS-Daten versteckte Dosen (sog. „Geocaches") in der Landschaft gefunden werden müssen. Diese Geocaches enthalten entweder Gegenstände oder Rätsel. Das Spiel lässt sich gut mit Hilfe der Vektorrechnung modellieren. (1 Längeneinheit entspricht 100 m).

**1.** Eine Person steht im Punkt $P(2 \mid 4 \mid 3)$, der erste Geocache befindet sich in dem Punkt $Q(5 \mid -2 \mid 1)$.

1.1 Berechnen Sie den Abstand zwischen der Person und dem ersten Geocache in Metern.

1.2 Die Person bewege sich geradlinig von ihrem Standort auf den Geocache zu. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden auf, entlang derer die Bewegung erfolgt.

1.3 Die Person erreicht den ersten Geocache im Punkt $Q$ und öffnet diesen. Allerdings liegt darin nur ein Zettel mit einem Hinweis zum nächsten Versteck:

„Der zweite Geocache befindet sich von der jetzigen Position aus 300 m in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$."

Ermitteln Sie mit diesem Hinweis die Position $R$ des zweiten Geocaches.

**2.** Ein gleichmäßig geneigter Hang ist das Suchgebiet für einen weiteren Geocache. In der Hangebene befinden sich drei markante Punkte $A(5 \mid -2 \mid 3)$, $B(2 \mid 5 \mid 4)$ und $C(-1 \mid 0 \mid 5)$. Diese drei Punkte bilden ein Dreieck. Man benötigt Informationen über das abzusuchende Gebiet.

2.1 Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in welcher der Hang liegt.

2.2 Bestimmen Sie das Maß des Innenwinkels des Dreiecks $ABC$ bei $A$.

2.3 In der Hangebene befindet sich ein Geocache im Punkt $S$ mit den Koordinaten $S(2 \mid 1 \mid x_3)$ besitzt. Ermitteln Sie die fehlende $x_3$-Koordinate.

**3.** Für die Lage von Geocaches sind teilweise besondere Bedingungen zu beachten, so sollen sie beispielsweise aus Sicherheitsgründen einen Mindestabstand von Bahngleisen haben. Ein Geocache befindet sich im Punkt $T(4 \mid 2 \mid 5)$. Die Lage der in der Nähe befindlichen, geradlinig verlaufenden Bahngleise, kann durch die Gleichung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 26{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Prüfen Sie rechnerisch, ob ein Mindestabstand von 100 m vom Geocache zu den Bahngleisen eingehalten wurde.

# L ö s u n g e n

**1.1 Abstand zwischen Person und Geocache** **1,5 Punkte**

Es gilt: $|\overrightarrow{PQ}| = \left|\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\-6\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+(-6)^2+(-2)^2} = \sqrt{49} = 7$ (LE)

Der Abstand zwischen Person und Geocache beträgt 700m.

**1.2 Gleichung der Geraden, längs derer sich die Person bewegt** **1,0 Punkte**

Geradengleichung: $g: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\-6\\-2\end{pmatrix}$

**1.3 Position *R* des zweiten Geocaches** **2,5 Punkte**

Die Position *R* des zweiten Geocaches liegt auf der Geraden mit der Gleichung

$$h: \vec{x} = \vec{q} + \mu \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\vec{v}$ besitzt die Länge $|\vec{v}| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$ (LE). Dies entspricht 500m.

Eine Entfernung von 300m entspricht daher dem Parameterwert $\mu = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Somit folgt: $\vec{r} = \begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix} + 0{,}6 \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6{,}8\\0{,}4\\1\end{pmatrix}$.

Der gesucht Punkt hat die Koordinaten $R(6{,}8 \mid 0{,}4 \mid 1)$.

**2.1 Koordinatengleichung der Ebene, in der der Hang liegt** **3,0 Punkte**

- *Parametergleichung* (1,0 P)
  - Richtungsvektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\7\\1\end{pmatrix} = \vec{u}$ und

    $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\2\\2\end{pmatrix}$; wähle $\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$
  - Parametergleichung: $e_1: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$

    $= \begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3\\7\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$

- *Koordinatengleichung* (2,0 P)
  - Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
  - Normalengleichungen:
    - Punktnormalengleichung: $e_1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$
    - Allgemeine Normalengleichung: $e_1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 14 = 0$
    - Koordinatengleichung: $e_1$: $x_1 + 3x_3 - 14 = 0$

## 2.2 Maß des Innenwinkels des Dreiecks *ABC* bei *A* — 2,0 Punkte

Als Scheitelpunkt des gesuchten Winkels ist der Punkt *A* vorgegeben.

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{34}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{44}} \approx 0{,}6673$$

Damit folgt: $\alpha \approx 48{,}14°$ .

## 2.3 Geocache im Punkt *S* — 1,5 Punkte

Die Punktprobe für den Punkt $S(2 \mid 1 \mid x_3)$ in der Ebene *e* aus 2.1 ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x_3 \end{pmatrix} - 14 = 0 \Leftrightarrow 2 + 3x_3 - 14 = 0 \Leftrightarrow 3x_3 = 12 \quad \Leftrightarrow x_3 = 4 \ .$$

Für den gesuchten Punkt gilt daher $S(2 \mid 1 \mid 4)$.

## 3. Einhaltung des Mindestabstands

**3,5 Punkte**

Gesucht ist der Abstand des Punkts $T(4\,|\,2\,|\,5)$ von der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}15\\26,5\\5\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

*1. Möglichkeit*: Berechnung über das Lotfußpunktverfahren

a) Hilfsebene $e$ mit $T\in e$ und $e\perp g$:

$$e\colon\ \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-8=0$$

b) Lotfußpunktberechnung

Durch Einsetzen der rechten Seite der Gleichung von $g$ ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}15\\26,5\\5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right]-8=0 \Leftrightarrow 68+5\lambda-8=0 \Leftrightarrow \lambda=-12$$

Damit folgt: $\vec{l} = \begin{pmatrix}15\\26,5\\5\end{pmatrix} - 12\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2,5\\5\end{pmatrix}$ ; $L(3\,|\,2,5\,|\,5)$

c) Abstand

Es gilt $\left|\overrightarrow{TL}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\2,5\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\0,5\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+0,25+0} = \sqrt{1,25} \approx 1,12$ (LE)

Der Abstand beträgt 112m. Damit wurde der Mindestabstand eingehalten.

*2. Möglichkeit*: Verwendung der Abstandformel

Nach der Abstandsformel gilt $d(T,g) = |\vec{u}^0\times\overrightarrow{A_gT}| = \frac{1}{|\vec{u}|}\cdot|\vec{u}\times\overrightarrow{A_gT}|$.

Dabei ist $\vec{u}$ ein Richtungsvektor und $A_g$ ein Punkt der Geraden $g$ ist.

- Für $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ gilt $|\vec{u}| = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$.
- Ein Punkt von $g$ ist z.B. der Aufpunkt $A_g(15\,|\,26,5\,|\,5)$.

  Damit gilt $\overrightarrow{A_gT} = \begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}15\\26,5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\-24,5\\0\end{pmatrix}$.

Nach der Abstandsformel ergibt sich damit:

$$d(T,g) = |\vec{u}^0\times\overrightarrow{A_gT}| = \tfrac{1}{\sqrt5}\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-11\\-24,5\\0\end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{\sqrt5}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-2,5\end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{6,25}}{\sqrt5} \approx 1,12 \text{ (LE)}$$

Der Abstand beträgt 112m. Damit wurde der Mindestabstand eingehalten.

# Aufgabe 3
# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

**1.** An einer Universität haben sich für das laufende Semester 200 Studierende (*Anmerkung*: das Wort Studierende sei die geschlechtsneutrale Bezeichnung) für das Studium Mathematik auf Lehramt eingeschrieben, 150 Studentinnen und 50 männliche Studenten. Ein Drittel aller Studentinnen studiert als zweites Fach Physik, beiden männlichen Studenten beträgt dieser Anteil 40%.

1.1 Erstellen Sie zu diesem Sachverhalt ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm.

1.2 Berechnen Sie, wie viele der Studierenden Physik studieren.

1.3 Auf der Semestereröffnungsveranstaltung sind alle 200 Studierenden anwesend. Eine studierende Person wird zufällig herausgegriffen.

1.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person eine Studentin ist und nicht Physik als zweites Fach hat.

1.3.2 Die herausgegriffene Person studiert Physik. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Person ein männlicher Student ist.

1.3.3 Untersuchen Sie, ob die Ereignisse „männlicher Student" und „Physik als zweites Fach" unabhängig sind.

**2.** Statistiken der Uni haben ergeben, dass 70% aller Studierenden am Hochschulsport teilnehmen. Auf dem Vorplatz der Mensa stehen acht Studierende zusammen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

2.1 Alle acht Studierenden nehmen am Hochschulsport teil.

2.2 Es befinden sich genau drei Teilnehmer am Hochschulsport darunter.

2.3 Unter den acht Studierenden sind mindestens sechs Teilnehmer am Hochschulsport.

**3.** Unter den drei Studierenden Nicole, Marco und Markus, hat sich ein kleines Glücksspiel etabliert. Man wirft ein 10-Cent-Stück gegen eine Wand. Die Person, die ihre Münze am nächsten an die Wand werfen konnte, gewinnt die Münzen aller Personen, die mitgespielt haben. Sind zwei Münzen gleich weit entfernt, darf jeder seine Münze wieder an sich nehmen. Die Zufallsgröße $X$ beschreibt den Gewinn oder Verlust eines Spielers in Cent.

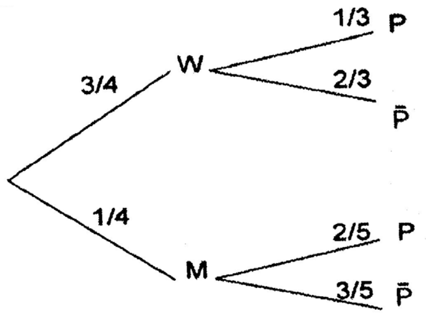
3.1 Geben Sie die Werte an, die die Zufallsgröße $X$ annehmen kann.

3.2 Marco hat die Resultate der vergangenen 20 Spiele notiert und dabei folgendes festgestellt: achtmal hat er gewonnen, sechsmal Nicole, viermal Markus und zweimal gab es ein Unentschieden. Betrachten Sie diese relativen Häufigkeiten nun als Gewinnwahrscheinlichkeiten. Berechnen Sie damit den Erwartungswert der Zufallsgröße $X$ aus Sicht von Marco. Interpretieren Sie das Ergebnis.

# L ö s u n g e n

## 1. Studierenden für das Lehramt Mathematik und Physik

### 1.1 Baumdiagramm **2,0 Punkte**




W: weiblich
M: männlich
P: Physik
W: weiblich
M: männlich
P: Physik

### 1.2 Anzahl der Physikstudenten **1,0 Punkte**

Anzahl der Physikstudenten: $150 \cdot \frac{1}{3} + 50 \cdot \frac{2}{5} = 50 + 20 = 70$

### 1.3 Semestereröffnungsveranstaltung

### 1.3.1 Person ist weiblich und hat nicht Physik als zweites Fach. **1,5 Punkte**

Gesucht ist eine UND-Wahrscheinlichkeit:

$P(\mathrm{W} \cap \overline{\mathrm{P}}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ (ein Pfad im Baumdiagramm)

### 1.3.2 Person, die Physik studiert, ist männlich **1,5 Punkte**

Gesucht ist eine Bedingte Wahrscheinlichkeit:
Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist: M (männlich)
Bedingung: P (Physik)

Damit ergibt sich:

$$P(\mathrm{P}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20}$$

$$P_{\mathrm{P}}(\mathrm{M}) = P(\mathrm{M} \mid \mathrm{P}) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{7}{20}} = \frac{2}{7} \approx 0{,}2857$$

### 1.3.3 Test auf Unabhängigkeit **1,5 Punkte**

Es gilt:

$$P(\mathrm{M} \cap \mathrm{P}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

$$P(\mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{P}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{20} = \frac{7}{80}$$

Dies bedeutet: $P(\mathrm{M} \cap \mathrm{P}) \neq P(\mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{P})$ . Die Ereignisse sind also abhängig.

## 2. Teilnahme am Hochschulsport

Interpretation: Bernoullikette der Länge $n = 9$
Treffer T: „Student nimmt teil." mit $p = 0{,}7$

### 2.1 Alle acht Studenten nehmen teil. **0,5 Punkte**

$$P(T = 8) = \binom{8}{8} \cdot 0{,}7^8 \cdot 0{,}3^0 \approx 0{,}0576$$

**2.2 Es nehmen genau 3 Studenten teil.** **1,0 Punkte**

$$P(T = 3) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^5 \approx 0{,}0467$$

**2.3 Es nehmen mindestens 6 Studenten teil.** **2,0 Punkte**

Zu berechnen ist eine Summenwahrscheinlichkeit:

$$P(T \geq 6) = P(T = 6) + P(T = 7) + P(T = 8)$$

$$= \binom{8}{6} \cdot 0{,}7^6 \cdot 0{,}3^2 + \binom{8}{7} \cdot 0{,}7^7 \cdot 0{,}3^1 + 0{,}0576$$

$$= 0{,}2965 + 0{,}1977 + 0{,}0576 \approx 0{,}5518$$

## 3. Glücksspiel

**3.1 Werte der Zufallsgröße *X*** **1,0 Punkte**

Es gilt: $X(\omega) = \{-10 ; 0 ; 20\}$

**3.2 Erwartungswert der Zufallsgröße *X* aus Sicht von Marco** **3,5 Punkte**

Wahrscheinlichkeiten: $P(X = -10) = \frac{5}{10}$

$P(X = 0) = \frac{1}{10}$

$P(X = 20) = \frac{4}{10}$

Erwartungswert: $E(X) = -10 \cdot \frac{5}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10} + 20 \cdot \frac{4}{10} = 3$

Auf lange Sicht gewinnt Marco 3 Cent pro Spiel.

# Schriftliche Abiturprüfung 2015

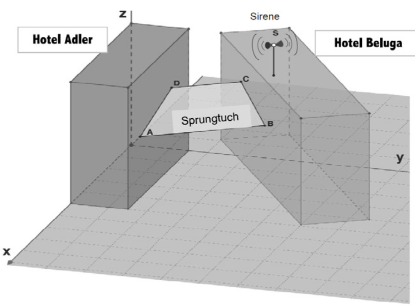
## E-Kurs

## Haupttermin

**Themenübersicht**

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung einer Logarithmusfunktion $F(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln(1+4x^2)$
  - Modell zur Photoanalyse
  - Untersuchung der Funktionenschar $f_a(x)=\frac{2ax}{1+a^2x^2}$
  - Untersuchung der Funktion $f_2(x)=\frac{4x}{1+4x^2}$

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Nachweis Trapez
  - Schnitt einer Ebene mit einer Geraden
  - Abstand Punkt - Ebene
  - Schnitt einer Ebene mit einer Geraden
  - Untersuchungen an einem Oktaeder




- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel
  - Kombinatorik
  - Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten und Bernoulli-Kette
  - Erwartungswert und Varianz

SOFTFRUTTI verlag

www.softfrutti.de

# Aufgabe 1
# ANALYSIS

**1.1** Gegeben ist die Funktion $F: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(1+4x^2)$.

1.1.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge von *F* an, untersuchen Sie *F* auf einfache Symmetrie und ermitteln Sie die Monotonieintervalle von *F*.
Bestimmen Sie unter Einbeziehung der obigen Erkenntnisse die Wertemenge von *F*.

1.1.2 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion *F*, wobei auch das Krümmungsverhalten des Graphen ersichtlich werden soll.

1.1.3 Beschreiben Sie, wie der Graph der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion *G* mit der Gleichung $G(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln[2015 \cdot (1+4x^2)]$ aus dem Graphen der Funktion *F* hervorgeht.

1.1.4 Begründen Sie, dass die Funktion bei Einschränkung der Definitionsmenge auf $\mathbb{R}_0^+$ umkehrbar ist, und ermitteln Sie den Term der zugehörigen Umkehrfunktion.
Berechnen Sie damit, an welcher Stelle die Funktion den Wert $\frac{1}{4} \cdot \ln(37)$ annimmt.

1.1.5 Gegeben ist die Funktion $k: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{4x}{1+4x^2}$.
Erläutern Sie, welche mathematische Beziehung zwischen der Funktion *k* und der Funktion *F* besteht.

**1.2** Gegeben ist die Funktion $f: [0;3] \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \frac{4x}{1+4x^2}$.

Die Funktion *f* beschreibt in einem mathematischen Modell die relative Photosyntheseaktivität $f(x)$ einer speziellen Pflanzenart in Abhängigkeit von der Beleuchtungsstärke *x* in der Einheit 100 Lux (siehe Abbildung 1).

Information: Als relative Photosyntheseaktivität betrachtet man in diesem vereinfachten Modell den Quotienten aus der Anzahl der Pflanzenzellen, die aktuell Photosynthese betreiben, und der maximalen Anzahl der zur Photosynthese fähigen Zellen des beleuchteten Teils der Pflanze.

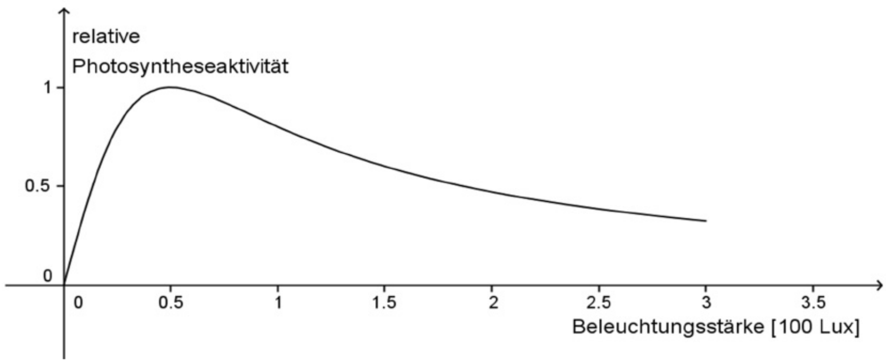



Abbildung 1: Relative Photosyntheseaktivität in Abhängigkeit von der Beleuchtungsstärke

Bestimmen Sie die Beleuchtungsstärken, bei denen die stärkste Zu- bzw. Abnahme der relativen Photosyntheseaktivität zu beobachten ist. Begründen Sie kurz den Ansatz Ihrer Rechnung.

[ Zur Verwendung ohne Nachweis: $f''(x) = \frac{128x^3 - 96x}{(1+4x^2)^3}$ ]

**1.3** Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_a$ durch

$$f_a : [0\,;\,3] \to \mathbb{R}\,;\quad x \mapsto \frac{2ax}{1+a^2x^2} \quad \text{mit } a > \frac{1}{3}.$$

Jede der Funktionen $f_a$ beschreibt die relative Photosyntheseaktivität $f_a(x)$ in Abhängigkeit von der Beleuchtungsstärke $x$, wobei der Parameter $a$ den Einfluss der Kohlendioxid-Konzentration in der Umgebung erfasst.

1.3.1 Zeigen Sie, dass die Funktion $f$ aus 1.2 zu dieser Funktionenschar gehört.

1.3.2 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a$ die Beleuchtungsstärke, bei der die relative Photosyntheseaktivität maximal ist.

1.3.3 Geben Sie die Ortskurve an, auf der alle Hochpunkte der Funktionenschar liegen. Interpretieren Sie Art und Lage dieser Ortskurve im Sachzusammenhang.

1.3.4 Ein Wissenschaftler misst die maximale relative Photosyntheseaktivität bei der Beleuchtungsstärke 50 Lux. Zeigen Sie, dass durch diese Messung der Wert des Parameters $a$ eindeutig bestimmt ist. Geben Sie diesen Parameterwert an.

**1.4** Die Funktion $f_2$ der Funktionenschar aus 1.3 wird nun losgelöst vom Kontext der Photosynthese weiter untersucht.
Betrachtet wird die Fläche $F$, die zwischen dem Graphen von $f_2$ und der $x$-Achse in den Grenzen 0 und 3 liegt.

1.4.1 Gesucht ist nun eine zur $y$-Achse parallele Gerade $g$ mit der Gleichung $x = b$.
Bestimmen Sie $b$ so, dass die Gerade $g$ die Fläche $F$ halbiert (siehe Abbildung 2).

1.4.2 Die zur $x$-Achse parallele Gerade $h$ halbiert die Fläche $F$ ebenfalls. Die Gerade $h$ hat die Gleichung $y = c$ (siehe Abbildung 2).
Beschreiben Sie, ohne explizite Berechnung, eine Vorgehensweise, wie man diese Halbierendeneigenschaft von $h$ überprüfen kann, wobei $c$ als bekannt vorausgesetzt wird.

1.4.3 Die beiden in 1.4.1 und 1.4.2 beschriebenen Geraden $g$ und $h$ zerlegen die Fläche $F$ in vier Teilflächen $F_1$, $F_2$, $F_3$ und $F_4$ (siehe Abbildung 2).
Zeigen Sie unter Verwendung eines geeigneten linearen Gleichungssystems, also ohne Integration, dass die Flächen $F_1$ und $F_3$ inhaltsgleich sind.

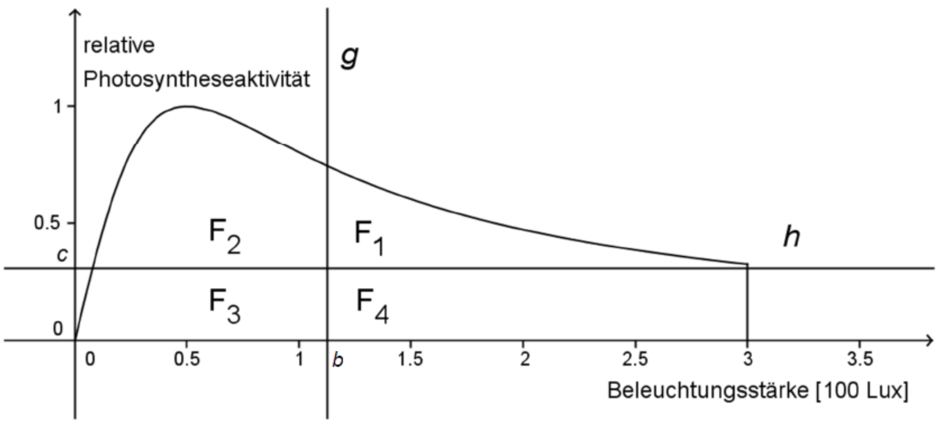



Abbildung 2: Flächenhalbierende Geraden $g$ und $h$ mit den durch sie erzeugten Teilflächen

# L ö s u n g e n

## 1.1 Funktion *F*

Gegeben ist die Funktion $F: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(1+4x^2)$ .

### 1.1.1 Definitionsmenge, Symmetrie, Monotonieintervalle und Wertemenge **10,0 Punkte**

- *Maximale Definitionsmenge* (1,0 P)

  $D_{\max} = \mathbb{R}$ (denn es gilt: $1 + 4x^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ )

- *Einfache Symmetrie* (1,5 P)
  - Die Definitionsmenge $D_{\max} = \mathbb{R}$ ist symmetrisch zu O.
  - Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

    $$F(-x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(1+4(-x)^2) = \frac{1}{2} \cdot \ln(1+4x^2) = F(x) \ .$$

    Der Funktionsgraph ist daher symmetrisch zur *y*-Achse.

- *Monotonieintervalle* (5,0 P)
  - Ableitung: $F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+4x^2} \cdot (4 \cdot 2x) = \frac{4x}{1+4x^2}$
  - Nullstelle von $F'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

    0 ist eine einfache Nullstelle $F'$ mit einem Vorzeichenwechsel von – nach +.
    (Für die Art des Vorzeichenwechsels genügt es, den Zählerterm $4x$ zu betrachten.)

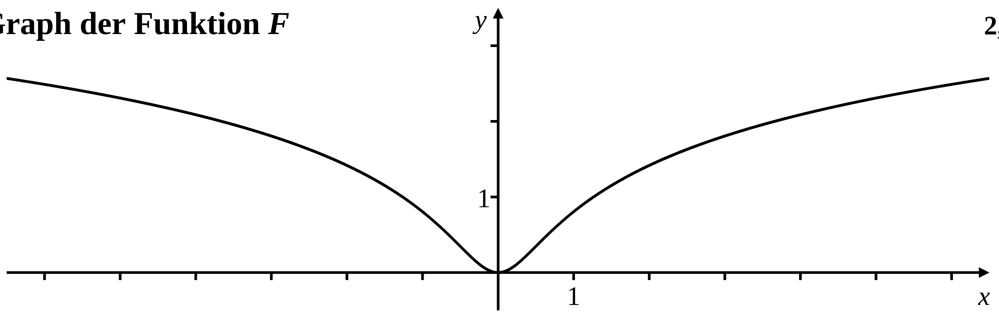
  Dies bedeutet: $F$ ist in $]-\infty\,;\,0]$ streng monoton fallend und
  in $[0\,;\,+\infty[$ streng monoton wachsend.

  Alternative: Erstellen einer Vorzeichentabelle für $F'$ .

- *Wertemenge* (2,5 P)

  Aus der Monotoniebetrachtung folgt, dass 0 globale Minimumstelle ist.
  Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} F(x) = +\infty$ und der Stetigkeit von $F$ folgt die Wertemenge $W = [0\,;\,+\infty[$.

### 1.1.2 Graph der Funktion *F* **2,0 Punkte**




### 1.1.3 Entstehung des Graphen der Funktion *G* **3,0 Punkte**

Unter Anwendung des Logarithmen- und des Distributivgesetzes ergibt sich:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2} \cdot \ln[2015 \cdot (1+4x^2)] = \frac{1}{2} \cdot [\ln(2015) + \ln(1+4x^2)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(2015) + \frac{1}{2} \cdot \ln(1+4x^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(2015) + F(x) \end{aligned}$$

Der Graph von $F$ wird um $\frac{1}{2} \cdot \ln(2015) \approx 3{,}8$ (LE) in Richtung der positiven *y*-Achse verschoben.

### 1.1.4 Umkehrfunktion **5,5 Punkte**

- *Begründung der Umkehrbarkeit* (1,0 P)

  Die eingeschränkte Funktion ist nach 1.1.1 in $[0\,;+\infty[$ streng monoton wachsend und daher umkehrbar.

- *Berechnung eines Funktionsterms der Umkehrfunktion* (2,5 P)

  Gesucht ist $x \in [0\,;+\infty[$, so dass gilt:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\ln(1+4x^2)=y \iff \ln(1+4x^2)=2y \quad | \text{ e-Funktion anwenden}$$
$$\iff 1+4x^2=\mathrm{e}^{2y}$$
$$\iff x^2=\tfrac{1}{4}\cdot(\mathrm{e}^{2y}-1)$$
$$\iff x=\sqrt{\tfrac{1}{4}\cdot(\mathrm{e}^{2y}-1)}=\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\mathrm{e}^{2y}-1}$$

(Wegen $x \in [0\,;+\infty[$ entfällt die negative Lösung.)

  Gleichung der Umkehrfunktion durch Variablentausch: $F^{-1}(x)=\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}$

  <u>Alternative</u>: Zuerst einen Variablentausch vornehmen und dann umformen.

- *Berechnung eines Funktionswerts* (2,0 P)

  Gesucht ist: $F^{-1}(\tfrac{1}{4}\ln(37)) = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot\ln(37)}-1} = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(\mathrm{e}^{\ln(37)})^{\frac{1}{2}}-1} = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\sqrt{37}-1} \approx 1{,}13$

### 1.1.5 Zusammenhang zur Funktion *k* **1,5 Punkte**

Betrachtet wird die Funktion $k: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{4x}{1+4x^2}$.

Nach 1.1.1 ist *k* die Ableitungsfunktion zur Funktion *F* (oder umgekehrt *F* eine Stammfunktion zu *k*).

### 1.2 Eingeschränkte Funktion *f* **6,5 Punkte**

Betrachtet wird die Funktion $f:[0;3]\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto\frac{4x}{1+4x^2}$.

- *Ansatz* (1,5 P)

  Die stärkste Zu- bzw. Abnahme erfolgt an den Extremstellen der ersten Ableitung. Zu bestimmen sind somit die Extremstellen der ersten Ableitung, also die Nullstellen der zweiten Ableitung.

- *Notwendige Bedingung* (2,0 P)

$$f''(x)=0 \iff \frac{128x^3-96x}{(1+4x^2)^3} \iff 128x^3-96x=0 \iff x^3-\tfrac{3}{4}x=0$$
$$\iff x\cdot(x^2-\tfrac{3}{4})=0 \iff x=0 \lor x^2=\tfrac{3}{4}$$
$$\iff \underbrace{x=0}_{\text{Randstelle}} \lor x=\sqrt{\tfrac{3}{4}}\approx 0{,}87 \lor \underbrace{x=-\sqrt{\tfrac{3}{4}}}_{\notin D}$$

- *Hinreichende Bedingung* (1,0 P)

  Vorzeichentabelle für $f''$:

| $x$ | 0 | | $\sqrt{0{,}75}$ | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | – | 0<br>mit<br>TP | + | |

Testwert: $f''(1)=\frac{32}{125}>0$

- *Entscheidung absolute Extremwerte* (1,0 P)

  $\sqrt{\frac{3}{4}}$ ist lokale Minimumstelle von $f'$. Da es sich um die einzige lokale Extremstelle in $D$ handelt, ist es auch die absolute Minimumstelle.

  Das absolute Maximum von $f'$ wird an einer der beiden Randstellen angenommen.

  Zur Entscheidung muss die Ableitung berechnet werden: $f'(x) = 4 \cdot \frac{1-4x^2}{(1+4x^2)^2}$

  Hiermit folgt: $f'(0) = 4$ und $f'(3) \approx -0{,}1$.

  Das absolute Maximum wird somit an der Stelle 0 angenommen.

  <u>Alternative</u>: Um eine Aussage über das Krümmungsverhalten von $G_f$ (auch in der Umgebung der Stelle 0) zu machen, kann man auch eine Vorzeichentabelle der nicht eingeschränkten Funktion betrachten.

| $x$ | | $0$ | | $\sqrt{\frac{3}{4}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |

- *Angabe der Extremwerte* (1,0 P)

  Bei Beachtung des Monotonieverhaltens von $f'$ (siehe z. B. Graph von $f$) erhält man
  - die stärkste Zunahme für eine Beleuchtungsstärke von 0 Lux
  - die stärkste Abnahme für eine Beleuchtungsstärke von etwa 87 Lux

    (Umrechnung: $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 100$ Lux $\approx 0{,}87 \cdot 100$ Lux = 87 Lux)

## 1.3 Betrachtung einer Funktionenschar $f_a$

Betrachtet wird die Funktionenschar $f_a : [0\,;\,3] \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto \; x \mapsto \frac{2ax}{1+a^2x^2}$ mit $a > \frac{1}{3}$.

### 1.3.1 Bestimmung eines Parameterwerts **1,0 Punkte**

Für $a = 2$ ergibt sich: $f_2(x) = \frac{2 \cdot 2 \cdot x}{1+2^2 \cdot x^2} = \frac{4x}{1+4x^2} = f(x)$.

### 1.3.2 Maximale relative Photosyntheseaktivität **5,5 Punkte**

- *Ableitung* (2,0 P)

$$f_a'(x) = \frac{2a\cdot(1+a^2x^2) - 2ax \cdot 2a^2x}{(1+a^2x^2)^2} = \frac{2a + 2a^3x^2 - 4a^3x^2}{(1+a^2x^2)^2} = \frac{2a - 2a^3x^2}{(1+a^2x^2)^2} = 2a \cdot \frac{1-a^2x^2}{(1+a^2x^2)^2}$$

- *Notwendige Bedingung* (2,0 P)

$$f_a'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1-a^2x^2}{(1+a^2x^2)^2} = 0 \quad (\text{da } a > \tfrac{1}{3} > 0)$$
$$\Leftrightarrow\; 1 - a^2x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{1}{a^2}$$
$$\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{a}$$

(Die negative Lösung entfällt aufgrund der Definitionsmenge [0 ; 3] . )

- *Hinreichende Bedingung* (1,0 P)

  Vorzeichentabelle für $f_a'$:

| $x$ | $0$ | | $1/a$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_a'(x)$ | | + | 0<br>mit<br>HP | – | |

Testwert: $f_a'(0) = 2a > 0$

- *Absolute Extremstelle*

  Die Stelle $\frac{1}{a}$ ist eine lokale Maximumstelle von *f*. Da es die einzige lokale Extremstelle in *D* ist, handelt es sich auch um die absolute Maximumstelle.

- *Umrechnung in die Einheit Lux* (0,5 P)

  Bei $\frac{1}{a} \cdot 100$ Lux wird die maximale relative Photosyntheseaktivität erreicht.

### 1.3.3 Ortskurve, auf der die Hochpunkte der Schar liegen **3,0 Punkte**

- *Bestimmung der Ortskurve* (2,0 P)

  Aus ergibt $x = \frac{1}{a}$ sich $a = \frac{1}{x}$.

  Setzt man dies in die Funktionsgleichung von $f_a$ ein, so ergibt sich als Gleichung der gesuchten Ortskurve:

  $$y = \frac{2a \cdot \frac{1}{a}}{1 + a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

  (Parallele zur *x*-Achse im Abstand 1)

- *Interpretation im Sachzusammenhang* (1,0 P)

  Maximale relative Aktivität liegt vor, wenn alle zur Photosynthese fähigen Zellen auch Photosynthese betreiben.

### 1.3.4 Eindeutige Festlegung des Parameters durch eine Messung **2,0 Punkte**

Umrechnung: 50 Lux entsprechen dem *x*-Wert 0,5.

Die Maximumstelle ist nach 1.3.4 eindeutig bestimmt durch $\frac{1}{a}$. Daher folgt:

$$\frac{1}{a} = 0{,}5 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; a = 2$$

## 1.4 Betrachtung der Funktion $f_2$

Betrachtet wird die Funktion $f_2 : [0\,;\,3] \to \mathbb{R}\;;\; x \mapsto \; x \mapsto \frac{4x}{1+4x^2}$

### 1.4.1 Parallele zur *y*-Achse **3,5 Punkte**

Gesucht ist nun eine zur *y*-Achse parallele Gerade *g* mit der Gleichung $x = b$.

- *Maß der gesamten Fläche A über dem Intervall* [0 ; 3] (1,0 P)

$$\mu(A) = \int_0^3 f_2(x)\,dx = \int_0^3 \frac{4x}{1+4x^2}\,dx = [\tfrac{1}{2} \cdot \ln(1+4x^2)]_0^3 = \tfrac{1}{2} \cdot [\ln(1+36) - \ln(1)] = \tfrac{1}{2} \cdot \ln(37)$$

- *Maß der Fläche $A_b$ über dem Intervall* [0 ; *b*] (1,0 P)

$$\mu(A_b) = \int_0^b f_2(x)\,dx = \int_0^b \frac{4x}{1+4x^2}\,dx = [\tfrac{1}{2} \cdot \ln(1+4x^2)]_0^b = \tfrac{1}{2} \cdot [\ln(1+4b^2) - \ln(1)] = \tfrac{1}{2} \cdot \ln(1+4b^2)$$

- *Berechnung von b* (1,5 P)

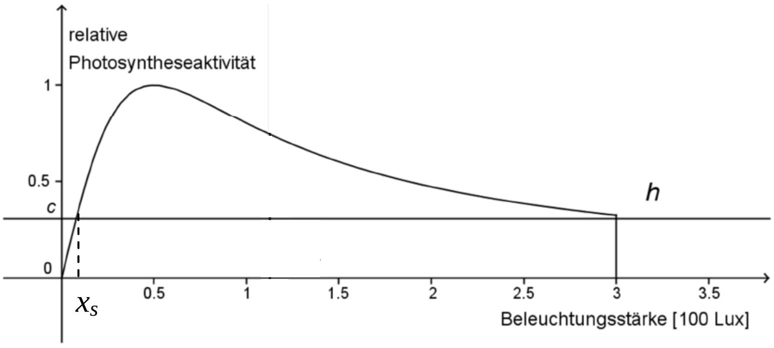
  Bedingung: $\mu(A_b) = \frac{1}{2} \cdot \mu(A)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow & \tfrac{1}{2} \cdot \ln(1+4b^2) &= \tfrac{1}{4} \cdot \ln(37) \\
&\Leftrightarrow & \ln(1+4b^2) &= \tfrac{1}{2} \cdot \ln(37) \\
&\Leftrightarrow & \ln(1+4b^2) &= \ln(\sqrt{37}) \\
&\Leftrightarrow & 1+4b^2 &= \sqrt{37} \\
&\Leftrightarrow & b^2 &= \tfrac{1}{4} \cdot (\sqrt{37} - 1) \\
&\Leftrightarrow & b &= \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\sqrt{37} - 1}\,)
\end{aligned}$$

  (nur die positive Lösung in den dem vorliegenden Zusammenhang sinnvoll.)

### 1.4.2 Parallele zur $x$-Achse **2,5 Punkte**

Betrachtet wird die Gerade $h$ mit der Gleichung $y = c$.




Eine mögliche Vorgehensweise zur Berechnung von $c$ kann wie folgt aussehen:

- Man berechnet zunächst die Schnittstelle $x_s$ des Graphen von $f_2$ mit der Geraden $h$.
- Man betrachtet das Integral $\int_{x_s}^{3} (f_2(x) - c)\, dx$ mit der unteren Grenze $x_s$.

  Dieses Integral berechnet den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von $f_2$ und der Geraden $h$ über dem Intervall $[x_s\,;\,3]$.
- Der Wert von $c$ ergibt sich aus der Bestimmungsgleichung:

  $$\int_{x_s}^{3} (f_2(x) - c)\, dx = \tfrac{1}{2} \cdot \mu(A) \iff \int_{x_s}^{3} (f_2(x) - c)\, dx = \tfrac{1}{4} \cdot \ln(37)$$

### 1.4.3 Inhaltsgleichheit der Flächen $F_1$ und $F_3$ **4,0 Punkte**

Aus der Eigenschaft der Geraden $g$ folgt: $F_2 + F_3 = F_1 + F_4$ (1)
Aus der Eigenschaft der Geraden $h$ folgt: $F_2 + F_1 = F_3 + F_4$ (2)

Durch Subtraktion (1) – (2) ergibt sich:

$$F_3 - F_1 = F_1 - F_3 \iff 2\,F_3 = 2\,F_1 \iff F_3 = F_1$$

# Aufgabe 2
# ANALYTISCHE GEOMETRIE

Im Film *„Der Oktaeder von Singapur“* stiehlt eine Bande von Trickdieben bei einem spektakulären Coup einen berühmten Diamanten aus dem Safe des Hotels Adler.

Die Flucht der Gauner findet in drei Phasen statt.

- *Phase A* : Errichten eines Sprungtuchs
- *Phase B* : Sprung vom 40 m hohen Dach des Hotels Adler auf das Sprungtuch
- *Phase C* : Ausschalten einer Sirene auf dem 35 m hohen Dach des Hotels Beluga

Die Geometrie der Anordnung wird in einem mathematischen Modell vereinfacht dargestellt. Die nachstehende Abbildung 1 stellt in diesem Modell die beiden Hotels als zwei Quader sowie das Sprungtuch dar. Die Grundflächen der beiden Hotels liegen in der $x$-$y$-Ebene.

Alle Angaben von Koordinaten beziehen sich auf die Längeneinheit 1 Meter.

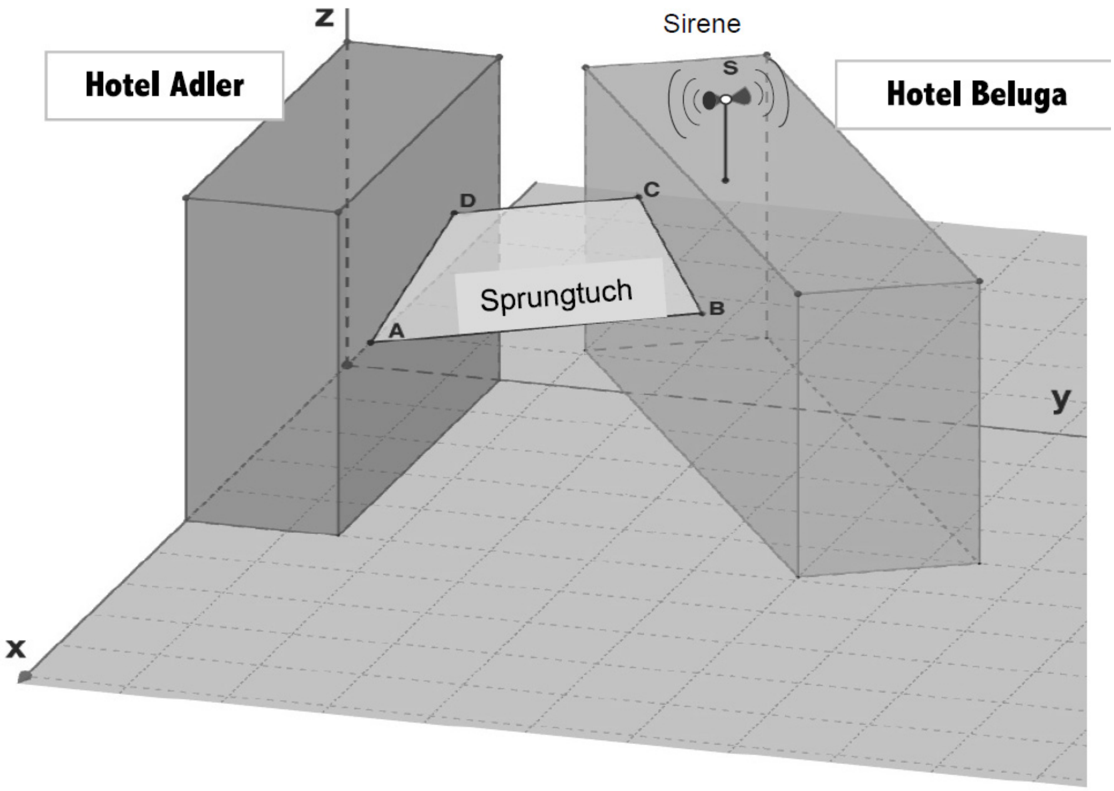



Abbildung 1: Modell der Anordnung mit den Hotels und dem Sprungtuch

**2.1** *Phase A*

Vier Mitglieder der Bande spannen von gemieteten Hotelzimmern aus ein Sprungtuch zwischen den beiden Hotels. Die Ecken des Tuchs liegen in den Punkten $A(40 \mid 15 \mid 20)$, $B(22 \mid 42 \mid 20)$, $C(4 \mid 30 \mid 26)$ und $D(14 \mid 15 \mid 26)$.

2.1.1 Zeigen Sie, dass die vier Ecken in einer Ebene $e_T$ liegen, und erstellen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform.

[Zur Kontrolle: $e_T:\ 3x + 2y + 13z = 410$]

2.1.2 Weisen Sie nach, dass das Sprungtuch trapezförmig ist und dass bei $C$ ein rechter Winkel vorliegt.

**2.2** *Phase B*

Der erfolgreiche Dieb springt mit dem Diamanten vom Dach des Hotels Adler auf das Sprungtuch.

2.2.1 Die Koordinaten der Punkte der Flugkurve lassen sich ab dem Absprungpunkt $(24|14|40)$ durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 14 \\ 40 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $t \geq 0$ erfassen.

Berechnen Sie die Koordinaten des Auftreffpunkts $T$ auf dem Tuch.

2.2.2 Die dem Dieb nächstgelegene Außenwand des Hotels Beluga ist Teil der Ebene $e_B$ mit der Gleichung $e_B$: $-2x + 3y = 82$ .
Berechnen Sie, wie weit der Punkt $T(18 \mid 22 \mid 24)$ von dieser Wand entfernt ist.

**2.3** *Phase C*

Auf dem Dach des Hotels Beluga befindet sich an einem Mast, der im Punkt $M(18|43|35)$ errichtet ist, eine Sirene. Der Dieb versucht vom Punkt $T(18 \mid 22 \mid 24)$ aus, die Sirene mit einem gezielten geradlinigen Schuss auszuschalten.

2.3.1 Geben Sie eine Gleichung der Geraden $g$ an, die längs des Mastes verläuft.

Geben Sie eine Gleichung der Geraden $h$ an, auf der die dem Sprungtuch zugewandte Dachkante des Hotels Beluga liegt.

2.3.2 Beschreiben Sie ein Verfahren auf Grundlage der Vektorrechnung, um folgende Frage zu beantworten: *Wie hoch muss die Sirene oberhalb der Dachfläche mindestens befestigt sein, damit dem Dieb das Ausschalten der Sirene gelingen kann?*

**2.4** Der gestohlene Diamant ist bekannt als „Oktaeder von Singapur“.

Das Objekt (seine Oberfläche besteht aus acht gleichseitigen Dreiecken) wird nun in einem Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm mathematisch modelliert.

$E(1 \mid -1 \mid 0)$ , $F(1 \mid 1 \mid 0)$ , $G(-1 \mid 1 \mid 0)$ und $H(-1 \mid -1 \mid 0)$ beschreiben diejenigen Ecken, die in der horizontalen (quadratförmigen) Symmetriefläche des Oktaeders liegen.

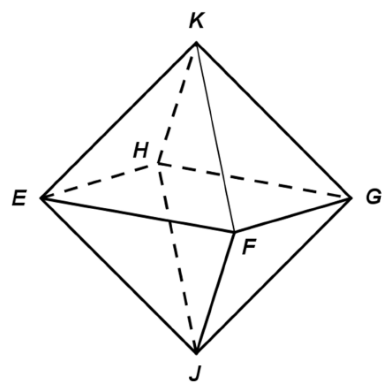


Abbildung 2: Modell des Diamanten

2.4.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte $J$ und $K$ in dem zugrunde liegenden Koordinatensystem.

2.4.2 Üblicherweise gibt man die Masse eines Diamanten in der Einheit „Karat“ an (1 Karat = 0,2 g). Der vorliegende Diamant hat eine Dichte von 3,5 g/cm³.

Bestimmen Sie das Volumen und die Karatzahl des „Oktaeder von Singapur“.

(Zum Vergleich: Der bekannte Diamant „Koh-i-Noor“ in der Krone der englischen Königin besitzt 109 Karat.)

# L ö s u n g e n

## 2.1 Phase *A*

### 2.1.1 Ebenen, in der das Sprungtuch liegt **4,5 Punkte**

- *Gleichung der Ebene* (3,5 P)
  - Richtungsvektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -18 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

    $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -26 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
  - Normalenvektor: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 39 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$
  - Punktnormalengleichung: $e_T\!: \ \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \right] = 0$
  - Allgemeine Normalengleichung: $e_T\!: \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 410 = 0$
  - Koordinatengleichung: $e_T\!: \ 3x + 2y + 13z - 410 = 0$

- *Punktprobe für den Punkt D* (1,0 P)

  Für den Punkt $D(14 \mid 15 \mid 26)$: $3 \cdot 14 + 2 \cdot 15 + 13 \cdot 26 - 410 = 410 - 410 = 0$

  Der Punkt *D* liegt in der Ebene $e_T$ und damit alle vier Punkt in einer Ebene.

### 2.1.2 Trapezförmigkeit des Sprungtuchs **3,0 Punkte**

- *Nachweis der Parallelität* (1,5 P)

  Für $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -18 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\overrightarrow{AB} = 1{,}8 \cdot \overrightarrow{DC}$.

  Dies bedeutet die Parallelität der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$.

- *Nachweis des rechten Winkels bei C* (1,5 P)

  Wegen $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} = 180 - 180 + 0 = 0$ gilt $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{CB}$.

## 2.2 Phase *B*

### 2.2.1 Auftreffpunkt auf dem Tuch **3,5 Punkte**

Gegeben ist die Flugkurve mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 14 \\ 40 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $(t \geq 0)$.

Diese Flugkurve wird mit der Ebene $e_T$: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 410 = 0$ geschnitten:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right] - 410 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; 620 + 25t - 65t^2 - 410 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; 65t^2 - 25t = -210$$

$$\Leftrightarrow \; t^2 - \frac{5}{13}t = -\frac{42}{13}$$

$$\Leftrightarrow \; \left(t - \frac{5}{26}\right)^2 = -\frac{42}{13} + \left(\frac{5}{26}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \; \left(t - \frac{5}{26}\right)^2 = \frac{2209}{676}$$

$$\Leftrightarrow \; t - \frac{5}{26} = -\frac{47}{26} \quad \vee \quad t - \frac{5}{26} = \frac{47}{26}$$

$$\Leftrightarrow \; t = -\frac{21}{13} \qquad \vee \quad t = 2$$

Nur die positive Lösung $t = 2$ ist im Sachkontext relevant. Damit ergibt sich der Schnittpunkt:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 24 \\ 14 \\ 40 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 22 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad T(18 \mid 22 \mid 24)\,.$$

### 2.2.2 Abstand des Punkts *T* von der Außenwand **2,5 Punkte**

Gesucht ist der Abstand von $T(18 \mid 22 \mid 24)$ zur Außenwandebene $e_B$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 82 = 0$ .

*1. Möglichkeit:* Verwendung der Abstandsformel

Als Punkt der Dachfläche wird $B(22 \mid 42 \mid 20)$ gewählt.

$$d(L, e) = \left| \vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{BT} \right| = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{BT} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 18 \\ 22 \\ 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 22 \\ 42 \\ 20 \end{pmatrix} \right] \right| = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -60 \\ 4 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \left| 8 - 60 + 0 \right| = \frac{52}{\sqrt{13}} = \sqrt{208} \approx 14{,}42 \;\; \text{(m)}$$

Die Entfernung des Auftreffpunkts von der Wand beträgt etwa 14,4 m.

*2. Möglichkeit:* Verwendung der Lotgeradenmethode

$$\text{Lotgerade: } l: \vec{x} = \vec{b} + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 18 \\ 22 \\ 24 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Schnitt mit der Ebene $e_B$ ergibt:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 18 \\ 22 \\ 24 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] - 82 = 0 \;\Leftrightarrow\; -36 + 66 + 13\lambda - 82 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 4$$

$$\text{Für den Lotfußpunkt } L \text{ gilt dann: } \vec{l} = \begin{pmatrix} 18 \\ 22 \\ 24 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 24 \end{pmatrix}$$

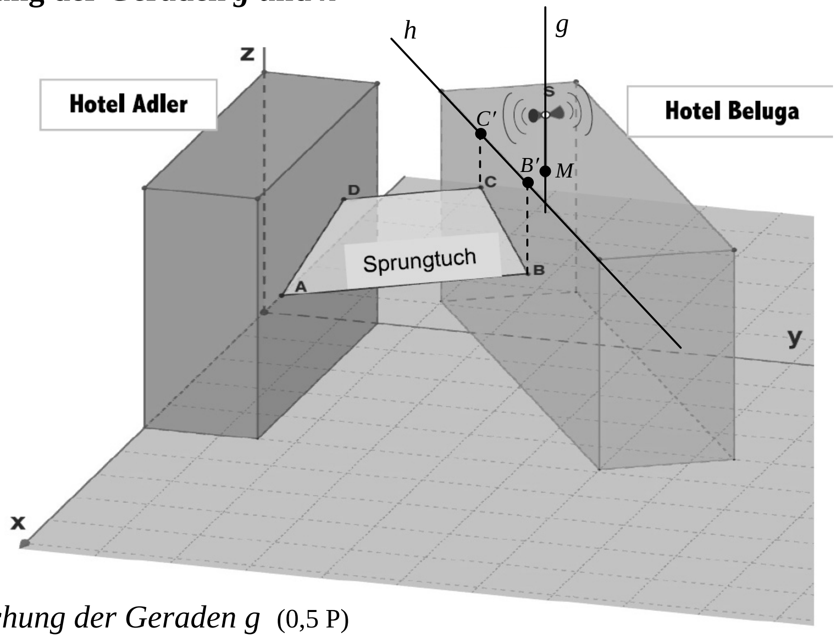
Damit ergibt sich für den gesuchten Abstand:

$$d(T, e) = |\overrightarrow{LT}| = \left| \begin{pmatrix} 18 \\ 22 \\ 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 24 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{208} \approx 14{,}42 \text{ (m)}$$

Die Entfernung des Auftreffpunkts von der Wand beträgt etwa 14,4 m.

## 2.3 Phase *C*

### 2.3.1 Gleichung der Geraden *g* und *h* **2,5 Punkte**




- *Gleichung der Geraden g* (0,5 P)

$$\text{Aufpunkt: } M(18|43|35) \quad ; \quad \text{Richtung: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ parallel zur } z\text{-Achse}$$

$$\text{Geradengleichung } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 43 \\ 35 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- *Gleichung der Geraden h* (2,0 P)

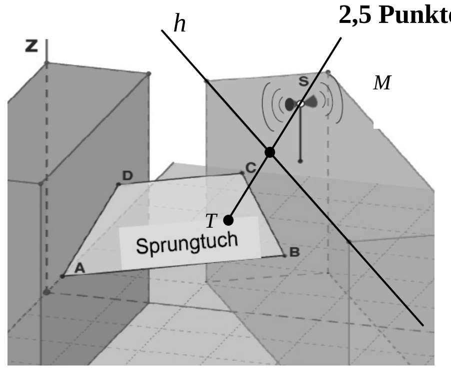
  Punkte: $B'(22|42|35)$ (der Punkt $B$ wird auf die Haushöhe 35 angehoben)
  $C'(4|30|35)$ (der Punkt $C$ wird auf die Haushöhe 35 angehoben)

  Richtung: $\overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Geradengleichung $h$ : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ 42 \\ 35 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

### 2.3.2 Ausschalten der Sirene

**2,5 Punkte**




- *Beschreibung eines Verfahrens*
  - Ansatz für den Punkts $S(18 \mid 43 \mid 35 + s)$
    Dabei ist $s$ die gesuchte oberhalb des Dachs.
  - Gerade $TS$, die den Schuss beschreibt:

    $$TS\colon\ \vec{x} = \vec{t} + \lambda \cdot \overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix} 18 \\ 22 \\ 24 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \\ 11+s \end{pmatrix}$$

  - Die gesuchte Mindesthöhe $s$ ergibt sich, wenn $TS$ die Dachkante $h$ schneidet:

    $$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ 42 \\ 35 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - Durch Gleichsetzen ergibt sich ein Gleichungssystem, aus dem sich neben den Parameterwerten $\lambda$ und $\mu$ auch die gesuchte Höhe $s$ berechnen lässt.

- *Rechnung*: (gemäß Aufgabenstellung aber nicht verlangt)

  Gleichsetzen der Gleichungen von $TS$ und $h$ ergibt:

  $$\begin{pmatrix} 18 \\ 22 \\ 24 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \\ 11+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 42 \\ 35 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \\ 11+s \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 11 \end{pmatrix}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} & 3\mu = 4 \\ 21\lambda & + 2\mu = 20 \\ (11+s)\lambda + & = 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{matrix}$$

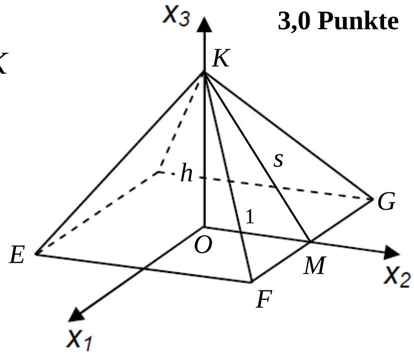
  Lösung des Gleichungssystems:
  - Aus (I) ergibt sich: $\mu = \frac{4}{3}$ .
  - Eingesetzt in (II) erhält man: $\lambda = \frac{52}{63}$ .
  - Mit diesem Wert folgt aus (III): $s = \frac{121}{52} \approx 2{,}33$ (m)

  Die Sirene muss mindestens 2,33 m über der Dachfläche befestigt sein.

## 2.4 Oktaeder von Singapur

### 2.4.1 Koordinaten der Punkte *K* und *J*

**3,0 Punkte**




Für die Seitenlänge *s* in dem gleichseitigen Dreieck *FGK* mit der Seitenlänge 2 gilt (nach Formelsammlung oder Anwendung Satzes des Pythagoras):

$s = \sqrt{3}$ .

Anwendung des Satzes von Pythagoras auf des Dreieck *OMK* ergibt:

$$h^2 + 1^2 = s^2 \;\Leftrightarrow\; h^2 + 1 = 3 \;\Leftrightarrow\; h^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; h = \sqrt{2}$$

Damit ergeben sich die Punkte $K(0\,|\,0\,|\,\sqrt{2}\,)$ und aus Symmetriegründen $J(0\,|\,0\,|\,-\sqrt{2}\,)$.

### 2.4.2 Karatzahl des Oktaeders

**3,5 Punkte**

- *Vektorielle Volumenberechnung* (2,5 P)

  Für das Volumenen der Pyramides *EFGHK* bzw. des Oktaeders gilt:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot \left|\left(\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EH}\right) \cdot \overrightarrow{EK}\right| = \frac{1}{3} \cdot \left|\left[\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3} \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot V_{\text{Pyramide}} = \frac{8}{3}\sqrt{2} \approx 3{,}7712 \;\; (\text{cm}^3)$$

  Elementargeometrische Alternative:

  Es handelt sich um ein Oktaeder mit der Seitenlänge $a = 2$. Gemäß Formelsammlung ergibt sich:

$$V_{\text{Oktaeder}} = \frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot a^3 = \frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot 8 \approx 3{,}7712 \;\; (\text{cm}^3)$$

- *Masse des Oktaeders* (1,0 P)

  Die Masse des Oktaeders von Singapur beträgt: $3{,}7712\ \text{cm}^3 \cdot 3{,}5\ \text{g/cm}^3 \approx 13{,}2\ \text{g}$ .

  Umrechnung in Karat: $\frac{13{,}2g}{0{,}2g} = 66$

  Der Diamant besitzt eine Masse von 66 Karat.

# Aufgabe 3
# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

Die folgende Aufgabe befasst sich mit der Entstehung und der Verbreitung des Lottospiels in Europa.[1]

**3.1** Die Entstehung des Lottospiels geht zurück auf die genuesische Senatorenwahl, die 1575 nach einem Staatsstreich eingeführt wurde. Fünf Plätze im Großen Rat der Stadt Genua wurden stets aus einer Liste mit 90 Bürgern ausgelost.
Auf der Liste des Jahres 1650 stehen 36 Bürger, die des Lesens nicht mächtig sind.
Weiter ist bekannt, dass 63 der möglichen zukünftigen Ratsmitglieder nicht an das kopernikanische Weltbild glauben, darunter 33 Ratsmitglieder, die nicht lesen können.

3.1.1 Erstellen Sie eine Vierfeldertafel der absoluten Häufigkeiten für die Bürgerliste des Jahres 1650. Verwenden Sie dabei die folgenden Bezeichnungen:
L: „Ein zufällig ausgewählter Bürger kann lesen."
K: „Ein zufällig ausgewählter Bürger glaubt an das kopernikanische Weltbild."

3.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

3.1.2.1 ein zufällig ausgewählter Bürger lesen kann oder an das kopernikanische Weltbild glaubt.

3.1.2.2 unter den Lesekundigen ein Bürger ausgewählt wird, der nicht an das kopernikanische Weltbild glaubt.

**3.2** Im Folgenden geht es um die Zusammensetzung des Rates des Jahres 1650.

3.2.1 Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, fünf Ratsmitglieder per Los aus einer Liste mit 90 Bürgern auszuwählen.

3.2.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den fünf ausgelosten Ratsmitgliedern keine Analphabeten befinden.

**3.3** Aus Wetten darauf, welche der 90 Bürger in den Senatorenstand erhoben werden, hat sich über die Jahre eine Lotterie entwickelt, die sich schließlich in ganz Europa verbreitete. Bei dieser genuesischen Lotterie wurden aus 90 Losnummern fünf Gewinnzahlen gezogen. Die Teilnehmer konnten dabei zwischen drei Spielvarianten wählen:

Ausgangsvariante: Ankreuzen lediglich <u>einer</u> Zahl. Dies brachte das Fünfzehnfache des Einsatzes, sofern diese Zahl eine der fünf gezogenen Zahlen war.

Variante „Ambe": Ankreuzen <u>zweier</u> Zahlen. Dies brachte das 270-fache des Einsatzes, sofern beide Zahlen unter den fünf gezogenen Zahlen waren.

Variante „Terne": Ankreuzen <u>dreier</u> Zahlen. Dies brachte das 5200-fache des Einsatzes, sofern alle drei Zahlen unter den fünf gezogenen Zahlen waren.

3.3.1 Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit für die Ausgangsvariante und erläutern Sie Ihr verwendetes Modell.

3.3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei der Variante „Terne" genau zwei Richtige zu tippen.

---

[1] Büchter, A., Henn, H.-W.: Elementare Stochastik. Springer-Verlag, Heidelberg 2007, S. 272-275

3.3.3 In Genua spielten im Jahr 1650 zahlreiche Personen die Variante „Ambe“.
Die Gewinnwahrscheinlichkeit dieser Variante beträgt $p = \frac{2}{801}$.

3.3.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keiner von 100 Spielern bei der Variante „Ambe“ gewonnen hat.

3.3.3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer aber höchstens drei von 100 Spielern bei der Variante „Ambe“ gewonnen haben.

3.3.3.3 Berechnen Sie, ab welcher Anzahl von Spielern die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der Spieler bei der Variante „Ambe“ gewinnt, größer als 50 Prozent ist.

**3.4** Um die leeren preußischen Kassen nach dem Siebenjährigen Krieg (1756–1763) wieder aufzufüllen, plante Friedrich der Große gemeinsam mit dem berühmten Mathematiker Leonard Euler die Einführung der genuesischen Lotterie in der Variante „Ambe“, wobei jeder Lottotipp einen Reichstaler kosten sollte.

Die Zufallsgröße $X$ beschreibt den Reingewinn des Staates pro Lottotipp.

Berechnen Sie den Erwartungswert sowie die Varianz der Zufallsgröße $X$ für die Spielvariante „Ambe“.

Entscheiden Sie begründet, ob eine solche Lotterie die preußische Haushaltslage nachhaltig verbessern konnte.

# L ö s u n g e n

## 3.1 Genuesische Senatorenwahl

### 3.1.1 Vierfeldertafels **2,5 Punkte**

K: „Ein zufällig ausgewählter Bürger kann lesen."
L: „Ein zufällig ausgewählter Bürger glaubt an das kopernikanische Weltbild."

| | K | $\overline{K}$ | Σ |
|---|---|---|---|
| L | 24 | 30 | 54 |
| $\overline{L}$ | 3 | ***33*** | ***36*** |
| | 27 | ***63*** | ***90*** |

### 3.1.2.1 Berechnung einer Oder-Wahrscheinlichkeit **1,0 Punkte**

$$P(L \cup K) = P(L \cup K) + P(L \cup \overline{K}) + P(\overline{L} \cup K) = \frac{24}{90} + \frac{30}{90} + \frac{57}{90} = \frac{649}{4400} \approx 63{,}33\%$$

### 3.1.2.2 Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit **2,0 Punkte**

Bedingung: Lesekundig

$$P_L(\overline{K}) = \frac{|\overline{K} \cap L|}{|L|} = \frac{30}{54} \approx 55{,}56\ \%$$

## 3.2 Zusammensetzung des Rates des Jahres 1650

### 3.2.1 Auswahl von 5 Ratsmitgliedern **1,0 Punkte**

Anzahl der 5-elementige Teilmengen: $|\,\Omega\,| = \binom{90}{5} = 43\,949\,258$

### 3.2.2 Keine Analphabeten unter den ausgelosten Ratsmitgliedern **2,0 Punkte**

E: Unter den fünf ausgelosten Ratsmitglieder befinden sich keine Analphabeten

Es gilt: $|\,E\,| = \binom{36}{0} \cdot \binom{54}{0} = 3\,162\,510$

$$P(E) = \frac{|\,E\,|}{|\Omega|} = \frac{3162\,510}{43\,949\,268} \approx 7{,}2\ \%$$

## 3.3 Genuesische Lotterie

### 3.3.1 Auswahl von 5 Ratsmitgliedern **2,5 Punkte**

A: Gewinn bei der Ausgangsvariante: Ankreuzen (Auswählen) nur einer Zahl
Es gibt insgesamt 90 mögliche Zahlen, davon sind 5 günstig.

Daher gilt: $P(A) = \frac{|\,A\,|}{|\Omega|} = \frac{5}{90} \approx 55{,}5\ \%$

*Verwendetes Modell*: Laplace-Experiment

<u>Alternative</u>: $P(A) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{85}{0}}{\binom{90}{1}} = \frac{5}{90} \approx 55{,}5\ \%$

### 3.3.2 Genau zwei Richtige bei der Variante Terne **1,5 Punkte**

B: Genau zwei Richtige bei der Variante Terne: (Auswahl von drei Zahlen)

$$P(\text{B}) = \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{1}}{\binom{90}{3}} = \frac{850}{117\,480} \approx 0{,}7\ \%$$

### 3.3.3 Gewinnvariante Ambe

Interpretation als Bernoulli-Kette mit Treffer $X$: Anzahl der Gewinner

Bernoulli-Kette der Länge $n = 100$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{801}$.

#### 3.3.3.1 Keiner gewinnt **1,5 Punkte**

$$P(X = 0) = \text{B}(100\,;\ \tfrac{2}{801}\,;\ 0) = \binom{100}{0}\cdot(\tfrac{2}{801})^0\cdot(\tfrac{799}{801})^{100} = (\tfrac{799}{801})^{100} \approx 0{,}7788 = 77{,}88\%$$

#### 3.3.3.2 Mindestens einer aber höchstens drei gewinnen **3,0 Punkte**

$$P(1 \le X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= \binom{100}{1}\cdot(\tfrac{2}{801})^1\cdot(\tfrac{799}{801})^{99} + \binom{100}{2}\cdot(\tfrac{2}{801})^2\cdot(\tfrac{799}{801})^{98} + \binom{100}{3}\cdot(\tfrac{2}{801})^3\cdot(\tfrac{799}{801})^{97}$$

$$\approx 0{,}19494 + 0{,}02416 + 0{,}00198 = 0{,}2211 = 22{,}11\%$$

#### 3.3.3.3 Berechnung der Kettenlänge **3,0 Punkte**

$$\begin{aligned}
P(X \ge 1) > 0{,}5 &\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0{,}5 \\
&\Leftrightarrow -P(X = 0) > -0{,}5 \qquad |\ \cdot(-1) \\
&\Leftrightarrow P(X = 0) < 0{,}5 \\
&\Leftrightarrow (\tfrac{799}{801})^n < 0{,}5 \qquad |\ \ln \\
&\Leftrightarrow n\ln(\tfrac{799}{801}) < \ln(0{,}5) \qquad |\ :\ln(\tfrac{799}{801}) < 0 \\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(\frac{799}{801})} \\
&\Leftrightarrow n > 277{,}26
\end{aligned}$$

Die Anzahl der Spieler muss mindestens 278 betragen.

### 3.4 Erwartungswert und Varianz **5,0 Punkte**

Die Zufallsgröße $X$ beschreibt den Reingewinn des Staates.

- *Wahrscheinlichkeitsverteilung von X* (1,0 P)

| $x$ | $-269$ | $1$ |
|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{2}{801}$ | $\frac{799}{801}$ |
| $x\cdot P(X = x)$ | $-\frac{538}{801}$ | $\frac{799}{801}$ |
| $x^2\cdot P(X = x)$ | $\frac{144722}{801}$ | $\frac{799}{801}$ |

- *Erwartungswert von X* (1,0 P)

  $E(X) = -\frac{538}{801} + \frac{799}{801} = \frac{261}{801} = \frac{29}{89} \approx 0{,}326$

- *Varianz von X* (2,0 P)

  $E(X^2) = \frac{144722}{801} + \frac{799}{801} = \frac{145\,521}{801}$

  $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{145\,521}{801} - (\frac{261}{801})^2 = \frac{116\,494\,200}{(801)^2} \approx 181{,}57$

- *Entscheidung* (1,0 P)

  Der Erwartungswert ist ein positiver Wert, daher wird der Staat auf lange Sicht hin profitieren.

# Schriftliche Abiturprüfung 2015

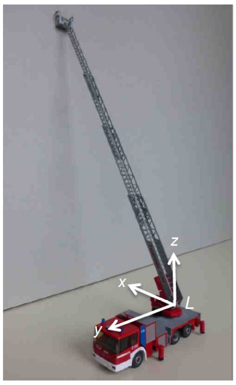
## E-Kurs

## Nachtermin

**Themenübersicht**

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung einer e-Funktion $f(x)=\frac{2\cdot e^x}{1+e^x}$
  - Modell zum Steigflug eines Wetterballons
  - Untersuchung der Funktionenschar $f_a(x)=\ln\left(\frac{x}{2-a\cdot x}\right)$

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Parameterbereich für eine Gerade
  - Flächenberechnung bei einem Trapez
  - Schnitt zweier Geraden
  - Abstand Punkt-Gerade
  - Untersuchungen an einem Oktaeder




- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Kombinatorik
  - Bernoulli-Kette
  - Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel (mit absoluten Werten)
  - Erwartungswert und Varianz bei Binomialverteilung

# Aufgabe 1
# ANALYSIS

**1.** Gegeben ist die Funktion $f : D_{\max} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \dfrac{2 \cdot e^x}{1+e^x}$.

1.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge von *f* sowie *y*-Achsenabschnitt des Graphen von *f* an.

1.2 Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ und erläutern Sie die geometrische Bedeutung dieses Grenzwertes für den Verlauf des Graphen von *f*.

1.3 Begründen Sie, dass sich der Graph von *f* für $x \to +\infty$ der Geraden mit der Gleichung $y = 2$ asymptotisch nähert.

1.4 Bestimmen Sie einen Term der ersten Ableitung $f'$ der Funktion *f* . Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von *f* und begründen Sie, dass die Funktion *f* umkehrbar ist.

(Zur Kontrolle und weiteren Verwendung: $f'(x) = \dfrac{2 \cdot e^x}{(1+e^x)^2}$ ).

1.5 Die Abbildung 1 zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Ableitungsfunktion $f'$ der Funktion *f* .

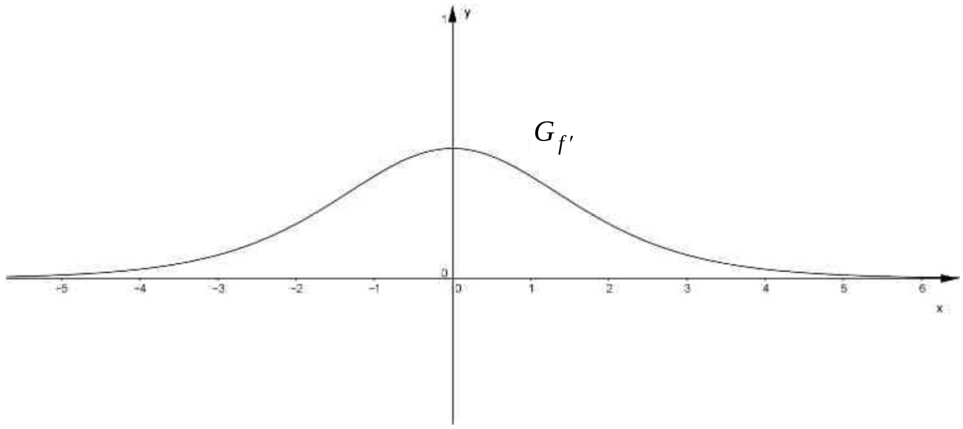



Abbildung 1: Graph der Ableitungsfunktion $f'$ von $f$

1.5.1 Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von $f'$ und der *x*-Achse über dem Intervall $[-1\ ;\ 0]$.

1.5.2 Prüfen Sie, ob der sich ins Unendliche erstreckenden Fläche zwischen dem Graphen von $f'$ und der *x*-Achse über dem Intervall $]-\infty\ ;\ 0]$ ein endlicher Inhalt zugeordnet werden kann und geben Sie diesen gegebenenfalls an.

1.5.3 Begründen Sie anhand des Graphen der Ableitungsfunktion $f'$ aus Abbildung 1, dass der Graph der Funktion *f* genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an.

1.6 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion *f* unter Beachtung aller bisher nachgewiesenen Eigenschaften in einem geeigneten Koordinatensystem.

1.7 Gegeben sei bei festem $c \in \mathbb{R}$ eine Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die $h(x) = c - h(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und die über $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Weisen Sie nach, dass der Graph der Ableitungsfunktion $h'$ achsensymmetrisch bezüglich der *y*-Achse ist.

**2.** Die Funktion $f$ aus Aufgabe 1. beschreibt in einem vereinfachten mathematischen Modell den Steigflug eines Wetterballons.

Durch die Variable $x$ wird die Zeit erfasst. 1 Längeneinheit (LE) auf der $x$-Achse entspricht dabei drei Minuten. Die Modellierung gilt für $x \geq -4$. Der Funktionswert $f(x)$ gibt die Höhe des Ballons an. 1 Längeneinheit auf der $y$-Achse entspricht dabei 5000m.

Zum Beobachtungszeitpunkt $x = 0$ befindet sich der Ballon auf einer Höhe von 5000m über Niveau des Meeresspiegels (NN).

2.1 Der Ballon startete von einer Anhöhe 180 m über NN. Berechnen Sie die Zeit, die seit dem Start bis zum Beobachtungszeitpunkt $x = 0$ vergangen ist.
In diesem Modell kann der Ballon eine bestimmte Höhe nicht übersteigen. Geben Sie diese Höhe an und begründen Sie kurz Ihre Antwort.

2.2 Bestimmen Sie den Wert von $\frac{1}{10} \cdot \int_{-4}^{6} f'(x)\,dx$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachkontext.

**3.** Gegeben ist die Schar der Funktionen $g_a : D_{\max} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \ln\left(\frac{x}{2-a\cdot x}\right)$ mit $a > 0$.

3.1 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge und die Nullstelle von $g_a$ in Abhängigkeit von $a$.

3.2 Bestimmen Sie den Wert des Parameters $a$ so, dass die zugehörige Funktion $g_a$ die Umkehrfunktion der Funktion $f$ aus Aufgabe 1 ist.

3.3 Die nebenstehende Abbildung 2 zeigt den Graphen der Funktion $g_1$ der Funktionenschar aus Aufgabe 3.

Die Tangente, die an einer bestimmten Stelle $x_B$ an den Graphen der Funktion $g_1$ gelegt wird, begrenzt zusammen mit der positiven $x$-Achse und der negativen $y$-Achse ein rechtwinkliges Dreieck, dessen auf der $y$-Achse liegende Kathete doppelt so lang ist wie die Kathete, die auf der $x$-Achse liegt.

Beschreiben Sie, ohne Rechnung, ein Verfahren, wie man die hierzu passende Stelle $x_B$ auffinden kann.

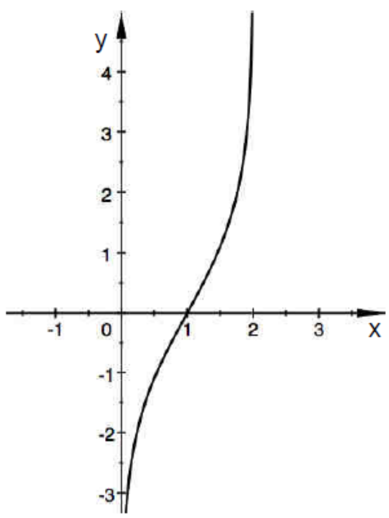



Abbildung 2: Graph der Funktion $g_1$

# L ö s u n g e n

## 1. Funktion *f*

Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \frac{2\cdot e^x}{1+e^x}$.

### 1.1 Definitionsmenge und *y*-Achsenabschnitt **2,0 Punkte**

*Maximale Definitionsmenge*: $D_{\max} = \mathbb{R}$ $(2\cdot e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R})$

*y-Achsenabschnitt*: $f(0) = \frac{2\cdot e^0}{1+e^0} = 1$

### 1.2 Grenzwert für $x \to -\infty$ **2,5 Punkte**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(\underbrace{2e^x}_{\to 0^+} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+e^x}}_{1}) = 0^+ \quad (e^x \to 0^+ \text{ für } x \to -\infty)$$

Der Graph von *f* nähert sich für $x \to -\infty$ asymptotisch (von oben) an die *x*-Achse an.

### 1.3 Annäherung an $y = 2$ für $x \to +\infty$ **2,0 Punkte**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{1}{e^x}+1} = \frac{2}{1} = 2$$

<u>Alternative</u>: Eine Polynomdivision ergibt: $2e^x : (e^x + 1) = 2 - \frac{2}{e^x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2 - \underbrace{\frac{2}{e^x+1}}_{\to 0}) = 2 - 0 = 2$$

### 1.4 Ableitung, Monotonie und Umkehrbarkeit **5,0 Punkte**

- *Ableitung* (2,0 P)

  $$f'(x) = \frac{2e^x\cdot(1+e^x) - 2e^x\cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$$

- *Monotonie* (2,0 P)

  Es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. *f* ist streng monoton wachsend in $\mathbb{R}$.

- *Umkehrbarkeit* (1,0 P)

  Da *f* streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist, folgt die Umkehrbarkeit.

### 1.5.1 Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von $f'$ und der *x*-Achse **3,0 Punkte**

$$\int_{-1}^{0} f'(x)\,dx = \left[\ f(x)\ \right]_{-1}^{0} = \left[\frac{2\cdot e^x}{1+e^x}\right]_{-1}^{0} = \left(\frac{2}{1+1}\right) - \left(\frac{2\cdot e^{-1}}{1+e^{-1}}\right) \approx 0{,}462$$

### 1.5.2 Inhalt der sich ins Unendliche erstreckenden Fläche **4,0 Punkte**

$$\int_{-\infty}^{0} f'(x)\,dx = \lim_{z\to-\infty}\left(\int_{z}^{0} f'(x)\,dx\right) = \lim_{z\to-\infty}\left[\frac{2\cdot e^x}{1+e^x}\right]_{z}^{0} = \lim_{z\to-\infty}(1 - \underbrace{\frac{2\cdot e^z}{1+e^z}}_{\substack{\to 0\\ \text{nach 1.2}}}) = 1$$

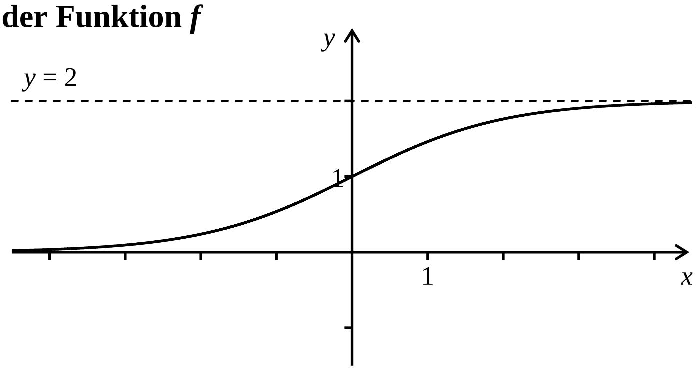
Die ins Unendliche reichende Fläche besitzt ein endliches Maß, nämlich 1 (FE).

### 1.5.3 Genau ein Wendepunkt **2,5 Punkte**

Der Graph der Ableitungsfunktion $f'$ hat genau ein Extremum an der Stelle 0, d.h. die Stelle 0 ist Wendestelle des Graphen der Funktion *f*.

Wendepunkt: $W(0\ |\ 1)$

**1.6 Graph der Funktion *f*** **3,0 Punkte**




**1.7 Symmetrie der Funktion *h*** **2,5 Punkte**

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$h(x) = c - h(-x)$ | Ableiten

$h'(x) = 0 - h'(-x) \cdot (-1)$ (Kettenregel auf der rechten Seite beachten)

$h'(x) = h'(-x)$

Dies bedeutet, dass die Ableitungsfunktion $h'$ symmetrisch zur $y$-Achse ist.

**2. Steigflug eines Wetterballons**

Betrachtet wird weiter die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{2 \cdot e^x}{1+e^x}$ .

**2.1 Zeit für 180 m über NN und maximale Höhe** **6,0 Punkte**

- *Start* (4,5 P)

  180 m über NN entsprechen 180 : 5000 = 0,306 Längeneinheiten.

  Bedingung: $f(x) = 0{,}36 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot e^x}{1+e^x} = 0{,}036$ | $\cdot (1 + e^x)$

  $\Leftrightarrow 2\,e^x = 0{,}036 + 0{,}036\,e^x$ | $-\,0{,}036\,e^x$

  $\Leftrightarrow 1{,}964\,e^x = 0{,}036$ | : 1,64

  $\Leftrightarrow e^x \approx 0{,}0183$ | ln

  $\Leftrightarrow x \approx -4$

  Dies entspricht einer Zeit von etwa 12 Minuten (1 Längeneinheit auf der $x$-Achse entspricht drei Minuten.)

- *Maximale Höhe* (1,5 P)

  Der Graph der Funktion $f$ nähert sich asymptotisch der Parallelen zur $x$-Achse mit der Gleichung $y = 2$, d.h. in diesem Modell ist die Flughöhe auf 10 000 m begrenzt.

**2.2 Wert des angegebenen Integrals und Interpretation** **4,0 Punkte**

$$\frac{1}{10} \cdot \int_{-4}^{8} f'(x)\,dx = \frac{1}{10} \cdot \left[\, f(x) \,\right]_{-6}^{4} = \frac{1}{10} \cdot \left[ \frac{2 \cdot e^x}{1+e^x} \right]_{-6}^{4} = \frac{1}{10} \cdot \left[ \left( \frac{2 \cdot e^4}{1+e^4} \right) - \left( \frac{2 \cdot e^{-6}}{1+e^{-6}} \right) \right]_{-6}^{4} \approx 0{,}1959$$

Umrechnung des Zahlenwertes: $0{,}1959 \mathrel{\hat{=}} 0{,}1959 \cdot \frac{5000\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{min}} \approx 326{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$

Mathematische Interpretation: Mittelwert von $f'$ über dem Intervall [–6 ; 4]

Interpretation im Sachzusammenhang: mittlere Steiggeschwindigkeit in [–6 ; 4]

## 3. Steigflug eines Wetterballons

Betrachtet wird die Funktionenschar mit der Gleichung $g_a(x) = \ln\left(\frac{x}{2-a\cdot x}\right)$ mit $a > 0$.

### 3.1 Maximale Definitionsmenge und Nullstelle in Abhängigkeit von *a* — 6,5 Punkte

- *Maximale Definitionsmenge* (4,5 P)

  Bedingung: $\frac{x}{2-a\cdot x} > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge 2 - ax > 0) \vee (x < 0 \wedge 2 - ax < 0)$

  $\Leftrightarrow (x > 0 \wedge -ax > -2) \vee (x < 0 \wedge -ax < -2) \quad | : (-a) < 0$

  $\Leftrightarrow (x > 0 \wedge x < \frac{2}{a}) \quad \vee \underbrace{(x < 0 \wedge x > \frac{2}{a})}_{\text{unerfüllbar}}$

  Damit folgt: $D_{\max} = ]0 ; \frac{2}{a}[$ .

  Alternative: Nullstelle des Bruchterms: 0 (mit Vzw.)
  Polstelle des Bruchterms: $\frac{2}{a}$ (mit Vzw.)
  Damit lässt sich folgende Vorzeichentabelle erstellen:

  | $x$ | | $0$ | | $\frac{2}{a}$ | |
  |---|---|---|---|---|---|
  | $g_a(x)$ | $-$ | $0$ mit | $+$ | \| mit | $-$ |

  Testwert: Stelle $\frac{1}{a}$

  $\frac{\frac{1}{a}}{2-a\cdot\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} > 0$

  Auch hier folgt für die maximale Definitionsmenge: $D_{\max} = ]0 ; \frac{2}{a}[$

- *Nullstelle* (2,0 P)

  $g_a(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2-a\cdot x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2-a\cdot x} = 1$

  $\Leftrightarrow x = 2 - ax \Leftrightarrow (1 + a)\,x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{1+a}$

### 3.2 Bestimmung eines Wertes für den Parameter *a* — 3,0 Punkte

Ein Punkt des Graphen von $f$ ist z.B. $P(0 \mid 1)$.
Ein Punkt des Graphen der Umkehrfunktion ist dann $\overline{P}(1 \mid 0)$ . ($x$- und $y$-Koordinate vertauscht)
Eine Punktprobe für $\overline{P}$ in der Gleichung von $g_a$ ergibt:

$g_a(1) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2-a}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2-a} = 1 \Leftrightarrow 1 = 2 - a \Leftrightarrow a = 1$

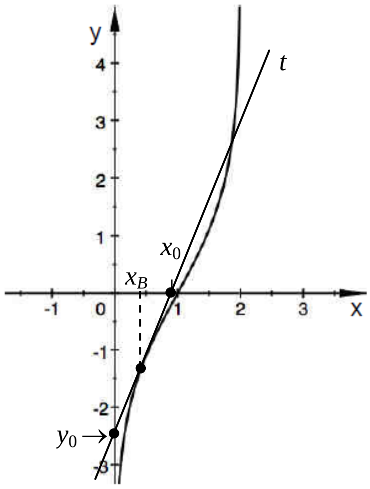
Alternative: Die Wertemenge der Funktion $f$ aus 1. ist $W = ]0 ; 2[$. (vgl. z.B. Graph in 1.6)
Die Definitionsmenge von $g_a$ ist $D = ]0 ; \frac{2}{a}[$.
Sind $f$ und $g_a$ Umkehrfunktionen, so müssen $D$ und $W$ übereinstimmen.
Dies ist für $a = 1$ der Fall.

Weitere Möglichkeit: Term der Umkehrfunktion bestimmen.
Termvergleich führt zu $a = 1$.

### 3.3 Auffinden einer passenden Stelle $x_B$ **3,0 Punkte**

Eine mögliche Vorgehensweise könnte wie folgt lauten:

1. Tangentengleichung aufstellen.
2. $y$-Achsenabschnitt der Tangente bestimmen.
   ( Punkt $Y(0 \mid y_0)$ )
3. Nullstelle der Tangente bestimmen.
   ( Punkt $N(x_0 \mid 0)$ )
4. $x_B$ berechnen aus dem Ansatz: $(-2) \cdot x_0 = y_0$ .

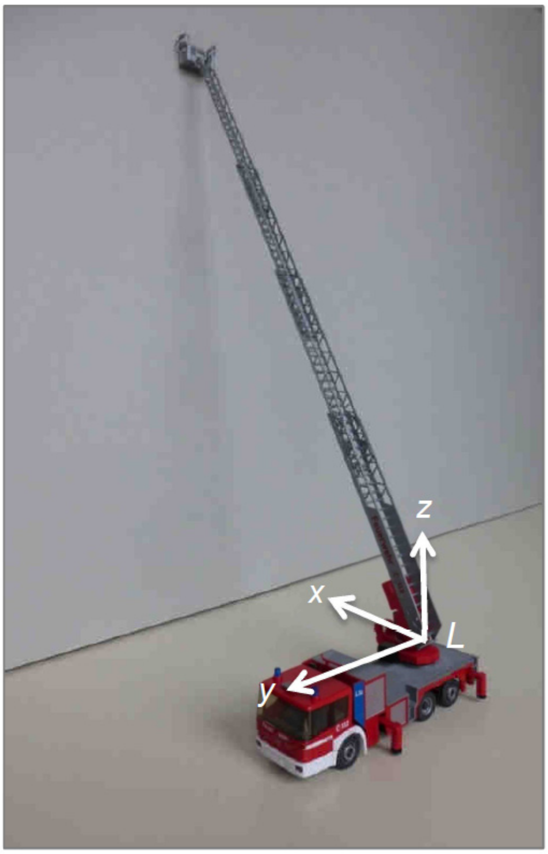



Alternative: Aus dem Ansatz $g_1{}'(x_b) = \tan(\alpha) = 2$
die Berührstelle $x_B$ berechnen.
(Dabei das Längenverhältnis der Katheten ausnützen.)

# Aufgabe 2
# ANALYTISCHE GEOMETRIE

Zur Brandbekämpfung und Personenrettung setzt die Feuerwehr unter anderem das Fahrzeug DLK 23-12 mit ausfahrbarer Drehleiter ein. Die Leiter sitzt auf einem Drehkranz, der zwei Meter über dem Boden auf dem Lastwagen montiert ist.

In der mathematischen Modellierung liegt der Ursprung des verwendeten Koordinatensystems in der Position $L$ des Drehkranzes. Die $y$-Achse zeigt in Fahrtrichtung, die $x$-Achse zeigt senkrecht zur Fahrtrichtung in Richtung Beifahrerseite und die $z$-Achse zeigt senkrecht nach oben (siehe Abbildung 1; 1 LE = 1 m).



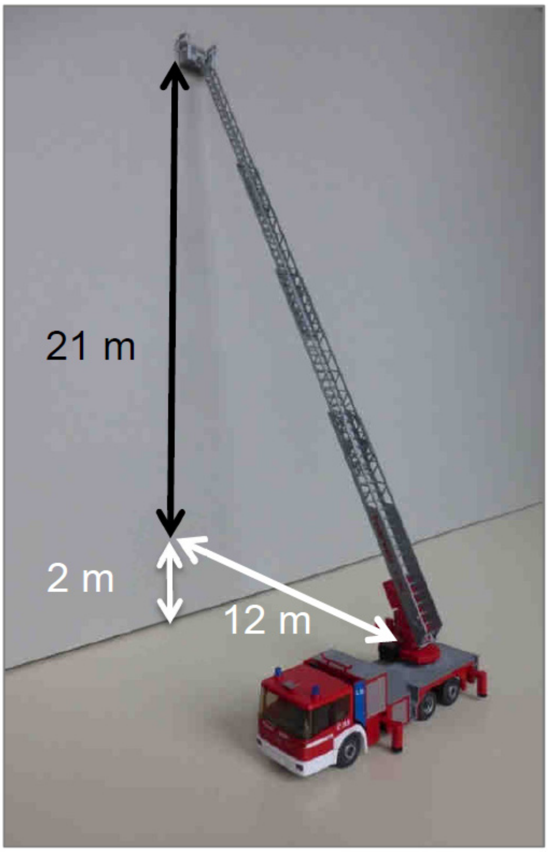




Abbildung 1: Das verwendete Koordinatensystem

Abbildung 2: Zur Bezeichnung DLK 23-12

**1.** Bei der Normbezeichnung DLK 23-12 steht DLK für „Drehleiter mit Korb“ und „23-12“ für eine Nennrettungshöhe über Bodenniveau von 23 Metern, wenn die Drehleiter voll ausgefahren und der Drehkranz der Drehleiter 12 Meter vom Gebäude entfernt ist (siehe Abbildung 2).

1.1 Begründen Sie, dass der Punkt $N_1(12 \mid 0 \mid 21)$ einer der Punkte ist, die mit der Drehleiter erreichbar sind, und berechnen Sie den zugehörigen Aufstellwinkel der Drehleiter (Winkel zwischen der Leiter und der Horizontalebene).

1.2 Geben Sie zwei weitere Punkte $N_2$ und $N_3$ an, die bei gleichem Aufstellwinkel und gleicher Leiterlänge erreichbar sind.

1.3 Beschreiben Sie die Lage aller Punkte, die bei fester Leiterlänge und festem Aufstellwinkel bei Rotation des Drehkranzes erreicht werden können.

**2.** Bei einem Wohnhausbrand mit Menschenrettung wird das Fahrzeug mit der Drehleiter parallel zum Haus in Stellung gebracht. Die Hausfront befindet sich also auf der Beifahrerseite.
In der dritten Etage macht sich eine Person an einem Fenster bemerkbar. Zur Personenrettung wird der Korb der Drehleiter zum Punkt F(10 | 5 | 10) gefahren.

2.1 Begründen Sie, dass die Leiter in diesem Fall durch eine Strecke beschrieben werden kann, die auf der Geraden $l$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt. Für welchen Wertebereich von $\mu$ wird die Leiter in diesem Fall beschrieben?

2.2 Berechnen Sie die Länge, auf die die Leiter in diesem Fall ausgefahren wurde.

**3.** Das brennende Haus besitzt ein Walmdach. Die der Straße zugewandte Fläche des Walmdaches ist gleichschenklig trapezförmig und hat die Eckpunkte $D_1(10 \mid 6 \mid 13)$, $D_2(10 \mid -4 \mid 13)$, $D_3(15 \mid -1 \mid 16)$ und $D_4(15 \mid 3 \mid 16)$.
Aus dieser Dachfläche dringt Rauch.

3.1 Erstellen Sie eine Gleichung der Ebene $e_D$, die die Dachfläche enthält, in Koordinatenform (zur Kontrolle: $e_D$: $-3x_1 + 5x_3 = 35$).

3.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt der der Straße zugewandten Fläche des Walmdaches.
Wie viele Liter Löschschaum sind notwendig, um die Dachfläche mit einer 10 cm dicken Schaumschicht zu bedecken?

3.3 Zur weiteren Untersuchung des Dachstuhls sollen einige Ziegel abgedeckt werden. Der Führer des Löschzuges beobachtet die Arbeiten von der Straßenebene aus.
Beschreiben Sie ein Vorgehen, mit dem im mathematischen Modell der Abstand von der Hausfront herausgefunden werden kann, in den sich der Löschzugführer mindestens zu begeben hat, um Blick auf die Dachfläche zu erhalten.

3.4 Von einem Dachständer aus verläuft eine elektrische Leitung entlang der Geraden
$g$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix} + \upsilon \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Dach des gegenüberliegenden Hauses.

3.4.1 Um sich einen genaueren Überblick über den Dachstuhlbrand zu verschaffen, wird eine Drohne eingesetzt. Die Drohne fliegt zunächst entlang der Geraden
$d$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Überprüfen Sie, ob die Drohne die elektrische Leitung ohne weitere Flugmanöver passieren kann.

3.4.2 Der Korb der Feuerwehrleiter wird hochgefahren, so dass sich der Kopf des darin stehenden Feuerwehrmannes im Punkt $K(4 \mid 4{,}5 \mid 17)$ befindet. Überprüfen Sie, ob in der Position K des Kopfes der Sicherheitsabstand von 1,5 Meter zur elektrischen Leitung eingehalten wird.

# L ö s u n g e n

## 1. Drehleiter

### 1.1 Punkt $N_1$ und Aufstellwinkel der Drehleiter — 3,0 Punkte

- *Punkt* $N_1$ (1,5 P)

  Um von der Position des Drehkranzes ( Punkt $L(0 \mid 0 \mid 0)$ ) zum Punkt $N_1(12 \mid 0 \mid 21)$ zu gelangen, muss man sich 12m in $x_1$-Richtung und 21m in $x_3$-Richtung bewegen. Der Punkt $N_1$ liegt 23m über Bodenniveau und ist folglich erreichbar.

- *Winkel* (1,5 P)

  Es gilt: $\tan(\alpha) = \frac{21}{12}$. Hieraus folgt $\alpha \approx 60{,}26°$ .

### 1.2 Weitere erreichbare Punkte — 1,0 Punkte

Weitere Punkt sind z.B.: $N_2(0 \mid 12 \mid 21)$ und $N_3(-12 \mid 0 \mid 21)$

### 1.3 Lage aller Punkte — 1,0 Punkte

Alle Punkte, die bei fester Leiterlänge und festem Aufstellwinkel erreichbar sind, liegen auf einem Kreis.

## 2. Wohnungsbrand

### 2.1 Geradengleichung und Parameterbereich — 2,5 Punkte

Richtungsvektoren: $\overrightarrow{LF} = \vec{f} - \vec{l} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Damit folgt: $l\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Passender Wertebereich: $\mu \in [0\,;\,5]$

### 2.2 Länge der Leiter — 1,0 Punkte

$d = |\overrightarrow{LF}| = \sqrt{10^2 + 5^2 + 10^2} = 15$

Die Leiter hat hier eine Länge von 15 m.

## 3. Walmdach

### 3.1 Gleichung der Ebene $e_D$ in Koordinatenform — 3,5 Punkte

– Richtungsvektoren: $\overrightarrow{D_1D_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{D_1D_4} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

– Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

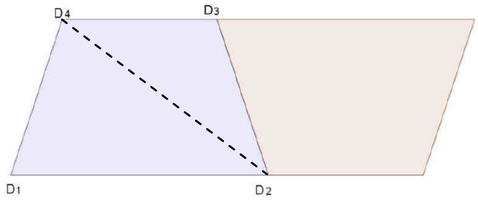
– Punktnormalengleichung: $e_D:\ \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{d_1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} \right] = 0$

– Allgemeine Normalengleichung: $e_D:\ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 35 = 0$

– Koordinatengleichung: $e_D:\ -3x_1 + 5x_3 - 35 = 0$

**3.2 Trapezförmige Fläche des Daches** **4,0 Punkte**

Das Trapezes kann gemäß der Abbildung zu einem Parallelogramm ergänzt werden.




$\mu(A) = \left| \left( \overrightarrow{D_1D_2} + \overrightarrow{D_4D_3} \right) \times \overrightarrow{D_1D_4} \right| \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \left| \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right|$

$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -42 \\ 0 \\ 70 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6664} = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{34} \approx 40{,}82$

Für das Schaumvolumen gilt: $V$ = Grundfläche · Höhe = 40,82 · 0,1 = 4,082 (m³)
Man benötigt ca. 4082 Liter Schaum.

Alternative: Die Trapezfläche kann auch als Summe zweier Dreiecksflächen berechnet werden, z.B. durch: $\mu(A) = \left| \overrightarrow{D_1D_2} \times \overrightarrow{D_1D_4} \right| + \left| \overrightarrow{D_2D_4} \times \overrightarrow{D_2D_3} \right|$.
(Nachteil: Es müssen zwei Vektorprodukte berechnet werden.)

**3.3 Abstand von der Hausfront** **2,5 Punkte**

Mögliche Vorgehenweise:

- Man bildet den Schnitt der Dachebene mit der Parallelebene zur Straßenebene in Augenhöhe des Löschzugführers.
- Anschließend bestimmt man den Abstand *d* der entstandenen Schnittgerade von der Hausfront. *d* ist der Mindestabstand.

## 3.4 Weitere Untersuchung des Dachstuhls

Die Elektrische Leitung verläuft entlang der Geraden $g$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix} + \upsilon \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

### 3.4.1 Flugbahn der Drohne **3,5 Punkte**

Flugrichtung der Drohne entlang der Geraden: $d$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ansatz: Schnitt der Geraden $g$ mit der Geraden $d$

$$\begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4\lambda + 10\nu = 30 \\ 3\lambda + \ 2\nu = 17 \\ 4\lambda - \quad \nu = 19 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{matrix}$$

Lösung des Systems: (II) + 2(III): $11\lambda = 55 \quad \Leftrightarrow \lambda = 5$
in (III): $20 - \nu = 19 \Leftrightarrow \nu = 1$
Probe in (I): $4 \cdot 5 + 10 \cdot 1 = 30$

Das Gleichungssystem ist lösbar, es gibt einen Schnittpunkt der beiden Geraden.

Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass die Drohne bei Beibehaltung des Kurses die Leitung nicht passieren kann.

### 3.4.2 Sicherheitsabstand **3,0 Punkte**

Gesucht ist der Abstand des Punktes $K(4 \mid 4{,}5 \mid 17)$ von der Geraden $g$ entlang der elektrischen Leitung.

*1. Möglichkeit*: Berechnung über das Lotfußpunktverfahren

a) Hilfsebene $e$ mit $P \in e$ und $e \perp g$:

$$e: \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4{,}5 \\ 17 \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 32 = 0$$

b) Lotfußpunktberechnung

Durch Einsetzen der rechten Seite der Gleichung von $g$ ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + 32 = 0 \Leftrightarrow -137 + 105\nu + 32 = 0 \Leftrightarrow \nu = 1$$

Damit folgt: $\vec{l} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$ ; $L(3 \mid 2{,}5 \mid 5)$

c) Abstand

Es gilt $\left|\overrightarrow{KL}\right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4{,}5 \\ 17 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0 + 0{,}25 + 1} = \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}12 \text{ (LE)}$

*2. Möglichkeit*: Verwendung der Abstandformel

Nach der Abstandsformel gilt $d(K\,,g) = |\,\vec{u}^{\,0} \times \overrightarrow{A_gK}\,| = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot |\,\vec{u} \times \overrightarrow{A_gK}\,|$ .

Dabei ist $\vec{u}$ ein Richtungsvektor und $A_g$ ein Punkt der Geraden $g$ ist.

- Für $\vec{u} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt $|\,\vec{u}\,| = \sqrt{100+4+1} = \sqrt{105}$ .
- Ein Punkt von $g$ ist z.B. der Aufpunkt $A_g(14\,|\,7\,|\,17)$.

  Damit gilt $\overrightarrow{A_gK} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4{,}5 \\ 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Nach der Abstandsformel ergibt sich damit:

$$d(K,g) = |\,\vec{u}^{\,0} \times \overrightarrow{A_gT}\,| = \tfrac{1}{\sqrt{105}} \cdot \left| \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \tfrac{1}{\sqrt{105}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{131{,}25}}{\sqrt{105}} \approx 1{,}12 \text{ (LE)}$$

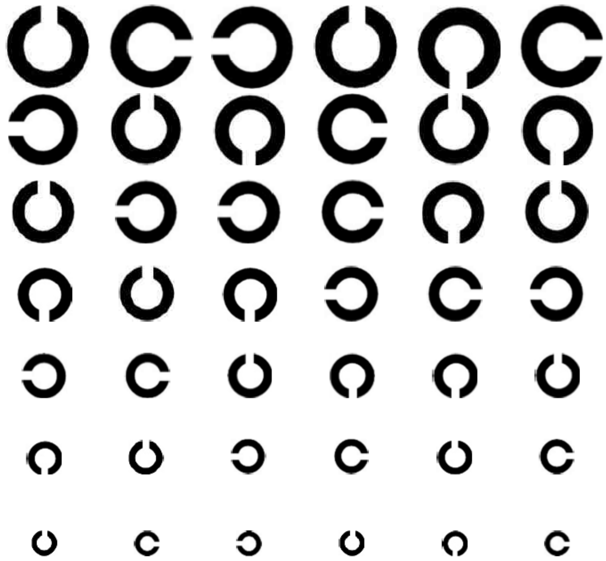
Interpretation im Sachkontext:
Der Abstand beträgt etwa 112m. Damit wurde der Sicherheitsabstand unterschritten.

# Aufgabe 3
# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

Die Abbildung veranschaulicht den Aufbau eines Sehtests, mit dessen Hilfe überprüft werden kann, welche Sehschärfe der Proband erreicht.

Bei dem Test sind sechs geschlitzte Kreisringe, sogenannte Landolt-Ringe, waagerecht nebeneinander angeordnet (im Folgenden *Sechserzeile*genannt).

Die Öffnung im Ring kann dabei nach oben, unten, links oder rechts zeigen und wird bei jedem Kreisring zufällig festgelegt. Nach unten hin nimmt die Größe der Ringe mit jeder neuen Sechserzeile ab.



Beim Test betrachtet eine Person die Anordnung der Ringe aus einem festen Abstand (5 m) und äußert sich dann zu den Öffnungsrichtungen der Ringe.

**1.** Im Folgenden wird die Konfigurierung einer Sechserzeile betrachtet.

1.1 Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen Anordnungen zu einer Sechserzeile.

1.2 Wie viele Anordnungen gibt es, wenn benachbarte Ringe nicht in die gleiche Richtung zeigen sollen?

1.3 Wie viele Anordnungen gibt es, wenn zwei der Ringe nach unten und die restlichen vier nach links zeigen? Erläutern Sie Ihren Rechenansatz.

**2.** Ein Arzt führt den Sehtest so durch, dass er von oben nach unten in jeder Sechserzeile je einen Ring zufällig auswählt und die Testpersonen nach dessen Öffnungsrichtung befragt.

Insgesamt besteht man den Test, wenn bei sieben abgefragten Ringen höchstens ein Fehler gemacht wurde.

2.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass man diesen Test durch willkürliches Raten nur mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0,13 % besteht.

2.2 Ein Testteilnehmer kann die ersten vier Sechserzeilen mit seinen Augen noch sicher erkennen und beginnt erst ab der fünften Zeile wahllos zu raten.

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit er den Sehtest besteht.

**3.** Neben der Sehschärfe kommt es beim Autofahren auch darauf an, ob ein Fahrer die in Verkehrszeichen und Ampeln auftretenden Farben eindeutig erkennen kann.

Eine in diesem Zusammenhang bekannte Sehschwäche ist die Rot-Grün-Blindheit, bei der Betroffene die Farben Rot und Grün nur schwer voneinander unterscheiden können.


In einer groß angelegten Studie wurden 600 Männer und 700 Frauen auf diese Art von Sehschwäche untersucht. Die große Mehrheit von 693 Frauen zeigte keinen auffälligen Befund. Bei den Männern waren 91,5 % ohne Anzeichen der Rot-Grün-Blindheit. In den nachstehenden Teilaufgaben sind folgende Abkürzungen zu verwenden:

R = „Eine Person besitzt eine Rot-Grün-Blindheit."

M = „Eine Person ist männlich."

3.1 Stellen Sie die absoluten Häufigkeiten der Studie in einer Vierfeldertafel dar.

3.2 Eine Person wird zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person rot-grün-blind ist.

3.3 Eine zufällig ausgewählte Person ist nicht rot-grün-blind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person männlich ist.

3.4 Im Online-Lexikon Wikipedia findet sich unter dem Stichwort „Rot-Grün-Sehschwäche" der folgende Textabschnitt:

*„Rot-Grün-Sehschwäche oder -Blindheit ist immer angeboren und verstärkt oder vermindert sich nicht im Laufe der Zeit. Von ihr sind etwa 9 % aller Männer und etwa 0,8 % der Frauen betroffen ..."*

Zeigen Sie, dass die in 3.3 betrachtete Studie die Prozentangaben des Wikipedia-Artikels näherungsweise bestätigt.

**4.** Die Daten aus Teilaufgabe 3.3 belegen, dass man bei willkürlicher Wahl einer Person (beide Geschlechter zusammengefasst) mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \approx 4{,}5\%$ eine Rot-Grün-Sehschwäche findet.
Die Oberstufe eines Gymnasiums wird von 250 Schüler/innen besucht. Mit der Zufallsgröße $X$ sei nun die mögliche Anzahl der Personen mit einer Rot-Grün-Sehschwäche bezeichnet.

4.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Person aus den Oberstufenklassen von der Sehschwäche „Rot-Grün-Blindheit" betroffen ist.
Interpretieren Sie kurz Ihr Ergebnis.

4.2 Berechnen Sie den Erwartungswert sowie die Standardabweichung von $X$.

# L ö s u n g e n

## 1. Konfigurierung einer Sechserzeile

### 1.1 Zahl aller möglichen Anordnungen — 1,5 Punkte

Anzahl der möglichen Anordnungen zu einer Sechserzeile: $4^6 = 4096$

### 1.2 Zahl der Möglichkeiten, wenn benachbarte Ringe nicht in gleiche Richtung zeigen — 2,0 Punkte

Anzahl der Möglichkeiten: $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3^5 = 972$

(4 Möglichkeiten für den ersten Ring, jeweils 3 Möglichkeiten für die folgenden Ringe)

### 1.3 Zahl der Sechserreihen, bei denen 2 Ringe nach unten und die restlichen 4 nach links zeigen — 2,5 Punkte

Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{4} = 15$

Erläuterung: 2 von den 6 Plätzen werden mit nach unten geöffneten Ringen besetzt, die restlichen 4 Plätze sind mit nach links geöffneten Ringen aufzufüllen.

## 2. Sehtest

### 2.1 Bestehen des Tests durch willkürliches Raten — 3,0 Punkte

Interpretation: Bernoullikette der Länge $n = 7$

Treffer $T$: Fehler mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{3}{4}$

$$P(T \le 1) = P(T = 0) + P(T = 1)$$

$$= \binom{7}{0} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 + \binom{7}{1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6$$

$$\approx 0{,}000061 + 0{,}001282 = 0{,}001343$$

Es gilt also $P(T \le 1) \approx 0{,}13\%$.

### 2.2 Raten erst ab der fünften Zeile — 3,5 Punkte

Interpretation: Bernoullikette der Länge $n = 3$

Treffer $T$: Fehler mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{3}{4}$

$$P(T \le 1) = P(T = 0) + P(T = 1)$$

$$= \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\approx 0{,}015625 + 0{,}140625 = 0{,}15625$$

Die Wahrscheinlichkeit den Sehtest zu bestehen beträgt ca. 15,6%.

## 3. Rot-Grün-Blindheit

### 3.1 Vierfeldertafel **2,5 Punkte**

| | M | $\overline{M}$ | Σ |
|---|---|---|---|
| R | 51 | 7 | 58 |
| $\overline{R}$ | ***549*** | ***693*** | 1242 |
| | ***600*** | ***700*** | 1300 |

M: „Person ist männlich.“
R: „Person besitzt Rot-Grün-Blindheit.“
Anzahl der Männer ohne Rot-Grün-Blindheit: $0{,}915 \cdot 600 = 549$

### 3.2 Wahrscheinlichkeit für Rot-Grün-Blindheit **1,0 Punkte**

$$P(\mathrm{R}) = \frac{58}{1300} \approx 4{,}5\ \%$$

### 3.3 Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten **2,0 Punkte**

Bedingung: Ausgewählte Person ist nicht rot-grün-blind.

$$P_{\overline{\mathrm{R}}}(M) = \frac{|\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{R}}|}{|\overline{\mathrm{R}}|} = \frac{549}{1242} \approx 44{,}2\ \%$$

### 3.4 Rot-Grün-Blindheit in Abhängigkeit vom Geschlecht **2,0 Punkte**

Rot-Grün-Blindheit bei Männern

$$P_{\mathrm{M}}(\mathrm{R}) = \frac{|\mathrm{R} \cap \mathrm{M}|}{|\mathrm{M}|} = \frac{51}{600} \approx 8{,}5\ \%$$

Rot-Grün-Blindheit bei Frauen

$$P_{\overline{\mathrm{M}}}(R) = \frac{|\mathrm{R} \cap \overline{\mathrm{M}}|}{|\overline{\mathrm{M}}|} = \frac{7}{700} = 1\ \%$$

Somit bestätigen die Werte näherungsweise die Prozentangaben des Wikipedia-Artikels.

## 4. Oberstufe eines Gymnasiums

### 4.1 Mindestens eine Person von Rot-Grün-Blindheit betroffen **2,0 Punkte**

Interpretation: Bernoullikette der Länge $n = 250$
Treffer $T$: Person mit Rot-Grün-Blindheit $p = 0{,}045$

$$P(T \geq 1) = 1 - P(T < 1) = 1 - P(T = 0)$$

$$= 1 - \binom{250}{0} \cdot 0{,}045^0 \cdot 0{,}955^{250} \approx 1$$

Es ist nahezu sicher eine Person anzutreffen, die rot-grün-blind ist.

### 4.2 Erwartungswert und Standardabweichung **3,0 Punkte**

Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p = 250 \cdot 0{,}045 = 11{,}25$

Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{250 \cdot 0{,}045 \cdot 0{,}995} \approx 3{,}28$

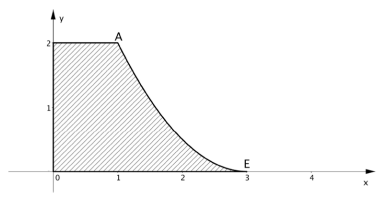
# Schriftliche Abiturprüfung 2015

## G-Kurs

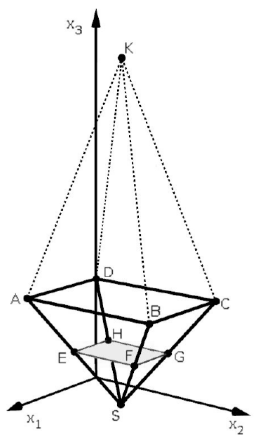
## Haupttermin

**Themenübersicht**

- <u>Aufgabe 1</u>: **Analysis**
  – Untersuchung einer e-Funktion $f(x) = (x+4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$
  – Modellierung: Profil Startrampe Skaterbahn
  einer ganzrationalen Funktion
  – Zuordnung des Graphen einer Stammfunktion




- <u>Aufgabe 2</u>: **Analytische Geometrie**
  – Modellierung: Teelichthalter
  – Winkel zwischen Geraden
  – Inhalt einer Dreiecksfläche
  – Abstand Punkt-Ebene




- <u>Aufgabe 3</u>: **Stochastik**
  – Erstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel (mit absoluten Werten)
  – Unabhängigkeit
  – Bernoulli-Kette

SOFTFRUTTI verlag
www.softfrutti.de

# Aufgabe 1
# ANALYSIS

**1.** Gegeben ist die Funktion $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x+4)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ .

1.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion *f* an. Untersuchen Sie *f* auf Nullstellen und auf einfache Symmetrie.

1.2 Begründen Sie mit Hilfe des Funktionsterms das Grenzwertverhalten der Funktion *f* für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$.

1.3 Bestimmen Sie die Gleichung der ersten Ableitung von *f* .

Zur Kontrolle und weiteren Verwendung: $f'(x) = (-\frac{1}{2}x - 1)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ .

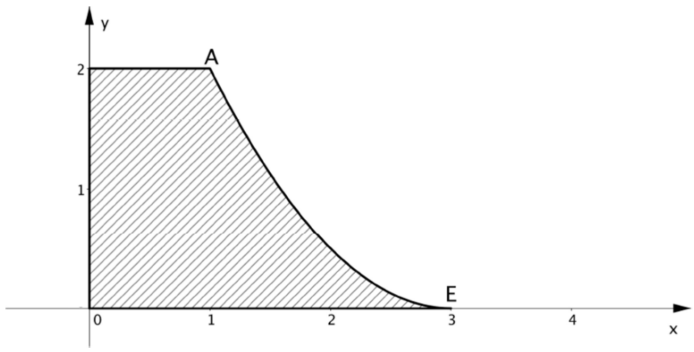
Zur weiteren Verwendung (ohne Nachweis): $f''(x) = \frac{1}{4}x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

1.4 Untersuchen Sie rechnerisch den Graphen von *f* auf Extrempunkte (einschließlich ihrer Art) und auf Wendepunkte.

1.5 Skizzieren Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse den Graphen von *f*.

1.6 Die Tangente an den Graphen von *f* im Punkt (0 | 4) und die Koordinatenachsen schließen eine Dreiecksfläche ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Dreiecksfläche.

**2.** In der Abbildung ist das Profil der Startrampe einer Skaterbahn zu sehen (Längeneinheit 1m). Der Verlauf des Profils zwischen den Punkten A(1 | 2) und E(3 | 0) soll durch eine Funktion modelliert werden. Dabei soll das Profil bei E die gleiche Steigung haben wie die *x*-Achse.



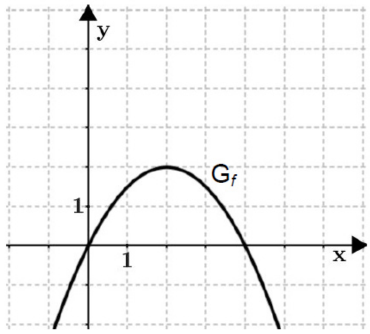

2.1 Architekt P.A. Rabel schlägt die Funktion mit der Gleichung $p(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$ vor.

Weisen Sie nach, dass diese Funktion eine geeignete Modellierung des Profilverlaufs zwischen A und E im Sinne der oben genannten Anforderungen darstellt.

2.2 Architekt G.E. Rade schlägt vor, den Profilverlauf zwischen A und E geradlinig durch eine lineare Funktion *g* zu modellieren. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von *g* und begründen Sie, dass es sich nicht um eine geeignete Modellierung im Sinne der oben genannten Anforderungen handelt.

2.3 Die Bahn wird nach dem Vorschlag des Architekten P.A. Rabel (aus 2.1) gebaut.
Die komplette vordere Seitenfläche der Rampe (siehe schraffierter Teil der Abbildung) soll einen Anstrich erhalten. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
(Bei der Berechnung eines Integrals ist eine Stammfunktion anzugeben.)

**3.** Gegeben ist nebenstehender Graph $G_f$ einer Funktion $f$.




3.1 Eine der Abbildungen 1 bis 6 stellt den Graphen der Ableitungsfunktion $f'$ dar. Geben Sie diese Abbildung an und begründen Sie Ihre Wahl.

3.2.1 Eine der Abbildungen 1 bis 6 stellt den Graphen einer **Stammfunktion** von $f$ dar. Geben Sie diese Abbildung an und begründen Sie Ihre Wahl.

3.2.1 Skizzieren Sie auf diesem Aufgabenblatt in die in 3.2.1 ausgewählte Abbildung den Graphen derjenigen Stammfunktion $F$ von $f$ mit der Eigenschaft $F(0) = -1$.

Abbildung 1:

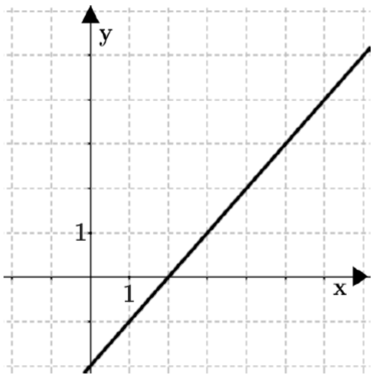



Abbildung 2:

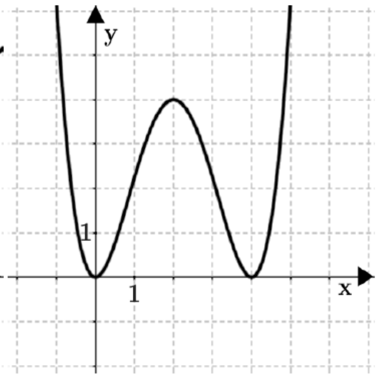



Abbildung 3:

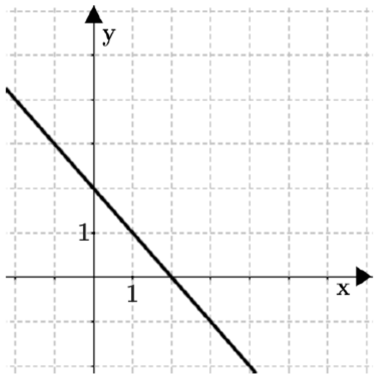



Abbildung 4:

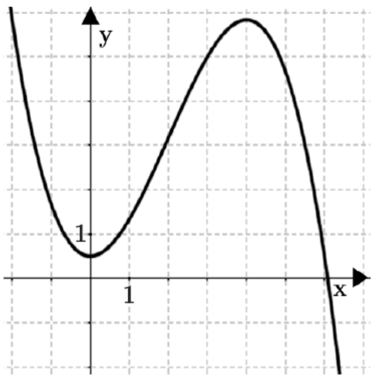



Abbildung 5:

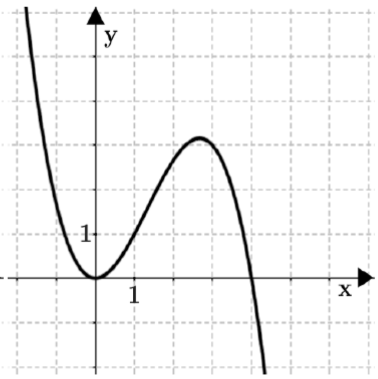
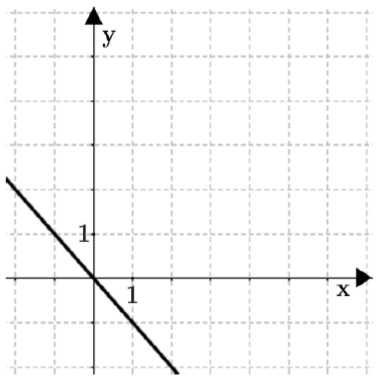



Abbildung 6:



# L ö s u n g e n

## 1. Untersuchung einer e-Funktion *f*

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = (x+4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ .

### 1.1 $D_{\max}$, Nullstelle und Symmetrie **3,0 Punkte**

- *Maximale Definitionsmenge* (0,5 P)
  $D_{\max} = \mathbb{R}$ (Es gibt keine Einschränkungen bezüglich des Funktionsterms).
- *Nullstelle* (1,0 P)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow (x+4) = 0 \qquad (e^{-\frac{1}{2}x}\ e^{x} > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x = -4$$

- *Symmetrie* (1,5 P)
  Es liegt keine einfache Symmetrie vor (vgl. z.B. die Lage der Nullstelle).
  Alternative: Funktionswerte z.B. an den Stellen –1 und 1 vergleichen.

### 1.2 Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ **2,0 Punkte**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\Big(\underbrace{(x+4)}_{\downarrow\ -\infty} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{\downarrow\ +\infty}\Big) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\Big(\underbrace{(x+4)}_{\downarrow\ +\infty} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{\downarrow\ 0^+}\Big) = 0^+ \quad \text{(die e-Funktion dominiert)}$$

### 1.3 Ableitung **2,0 Punkte**

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (x+4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (-\tfrac{1}{2}) = (1 - \tfrac{1}{2}x - 2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = (-\tfrac{1}{2}x - 1) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

### 1.4 Extrem- und Wendepunkt **5,5 Punkte**

- *Extrempunkt* (3,0 P)
  - Notwendige Bedingung:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (-\tfrac{1}{2}x - 1) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\tfrac{1}{2}x - 1 = 0 \qquad (e^{-\frac{1}{2}x} > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \ \text{(mit Vzw.)}$$

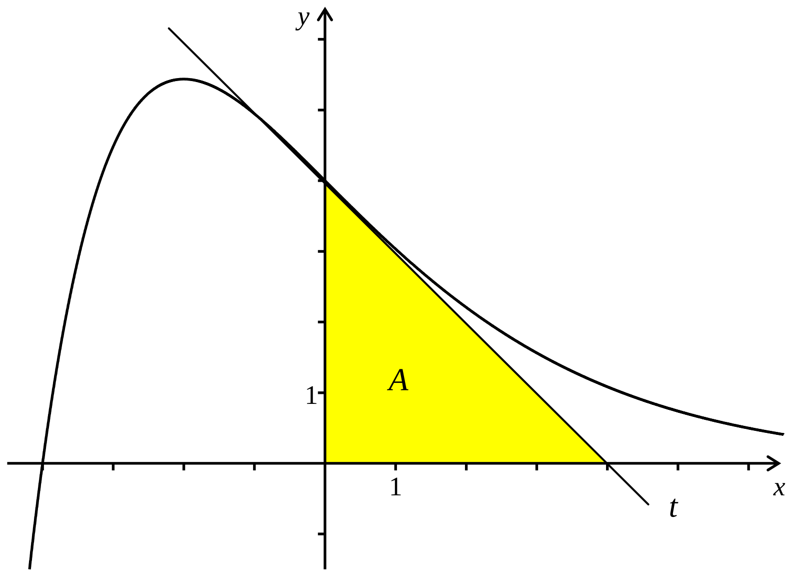
  - Hinreichende Bedingung:
    Wegen $f''(-2) = -\frac{1}{2}e < 0$ liegt ein Hochpunkt vor.
    Alternative: Vorzeichentabelle mit Vorzeichenwechsel der Form + 0 – bei –2.

| $x$ | | $-2$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – |
| | | mit Vzw. | |
| | | HP | |

  - Angabe des Extrempunkts
    Mit $f(-2) = 2e$ ergibt sich der Hochpunkt $H(-2 \mid 2e)$.

- *Wendepunkt* (2,5 P)
  - Notwendige Bedingung:
    $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (mit Vzw.)
  - Hinreichende Bedingung:
    $f''$ hat bei 0 einen Vorzeichenwechsel, somit liegt eine Wendestelle vor.
  - Angabe des Extrempunkts:
    Mit $f(0) = 4$ ergibt sich der Wendepunkt $W(0 \mid 4)$.

### 1.5 Graph **2,0 Punkte**




### 1.6 Tangente an den Graphen **2,0 Punkte**

Gemäß der allgemeinen Tangentengleichung ergibt sich für die Tangente in $P(0 \mid 4)$:

$t$: $y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) = -1 \cdot (x - 0) + 4 = -x + 4$

Nullstelle von $t$: $x = 4$

Inhalt der Dreiecksfläche: $\mu(A) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$ (FE) (siehe auch Abbildung in 1.5)

## 2. Startrampe einer Skaterbahn

### 2.1 Modellierung mithilfe einer Parabel **2,0 Punkte**

Für $p(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$ gilt $p'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x-3) = x-3$.

- Übergang in A: $p(1) = \frac{1}{2}(1-3)^2 = 2$ und
- Übergang in E: $p(3) = \frac{1}{2}(3-3)^2 = 0$
- Steigung in E: $p'(3) = 3-3 = 0$

Die Forderungen sind erfüllt. Es handelt es sich um eine geeignete Modellierung.

### 2.2 Geradlinige Verbindung **1,5 Punkte**

Steigung der gesuchten Geraden $g$: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{3-1} = -1$

Ansatz für die Geradengleichung: $y = -x + n$

Punktprobe für den Punkt E(3 | 0): $0 = -3 + n \Leftrightarrow n = 3$

Gleichung der Geraden $g$: $y = -x + 3$

Für die Steigung von $g$ gilt $g'(3) = m = -1 \neq 0$. Es liegt also kein knickfreier Übergang zur $x$-Achse vor. Daher handelt es sich nicht um eine geeignete Modellierung.

### 2.3 Berechnung des Flächeninhalts **4,0 Punkte**

Rechteckfläche: $\mu(A_1) = 1 \cdot 2 = 2$

Restfläche: $\mu(A_2) = \int_1^3 \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2\,dx = \int_1^3 \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (x-3)^3\right]_1^3 = \frac{1}{6} \cdot \left[(x-3)^3\right]_1^3$

$= \frac{1}{6} \cdot [0^3 - (-2)^3] = \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}$

Inhalt der Gesamtfläche: $\mu(A_1) + \mu(A_2) = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ ($m^2$)

### 3.1 Graph der Ableitungsfunktion **2,0 Punkte**

Der gesuchte Graph befindet sich in Abbildung 3.

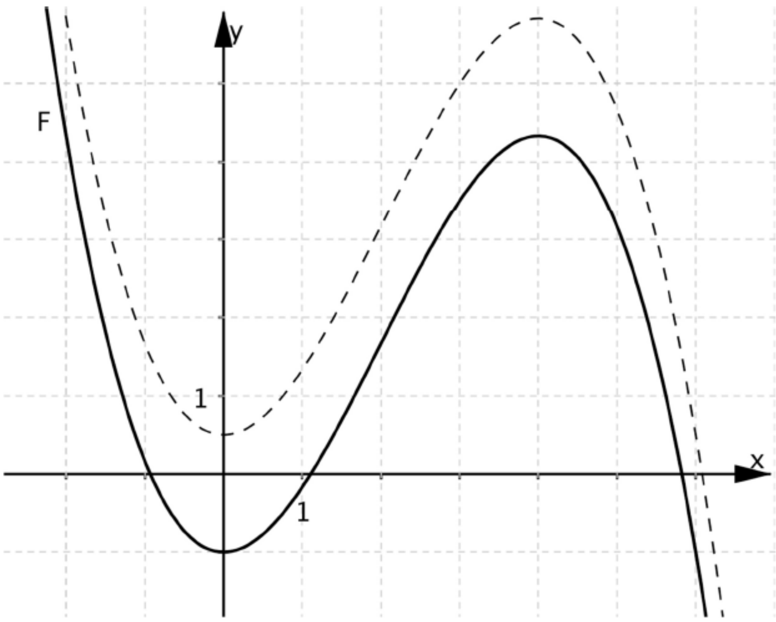
Begründung: Nullstelle bei 2 und streng monoton fallend

### 3.2.1 Graph einer Stammfunktion **2,0 Punkte**

Der gesuchte Graph befindet sich in Abbildung 4.

Begründung: Extrempunkte 0 und 4, keine weiteren Extrempunkte

### 3.2.2 Skizze einer Stammfunktion mit der Eigenschaft $F(0) = -1$ **2,0 Punkte**




Anforderungen an die Skizze:

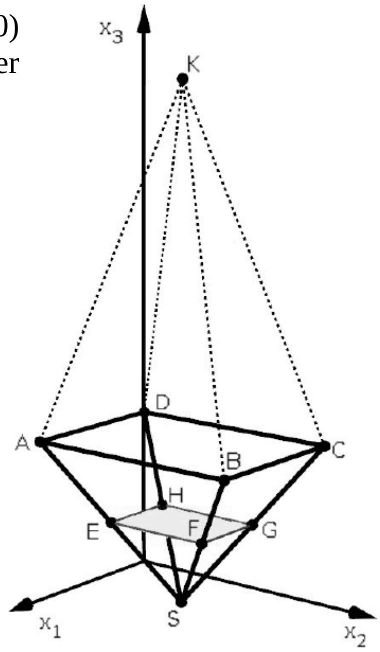
Der Punkt (0 | –1), die Extremstellen, die Monotonie und der Verlauf unterhalb des abgebildeten Graphen müssen stimmen.

# Aufgabe 2
# ANALYTISCHE GEOMETRIE

Eine Firma stellt moderne Teelichthalter her. Sie haben die Form einer auf der Spitze stehenden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche, an deren Eckpunkten vier gleich lange Schnüre zum Aufhängen befestigt sind. Die Abbildung zeigt eine modellhafte Darstellung des Teelichthalters mit Aufhängeschnüren.

Es sind die Eckpunkte $A(10 \mid 0 \mid 10)$, $B(10 \mid 14 \mid 10)$, $D(0 \mid 0 \mid 10)$ der Grundfläche und die Spitze $S(5 \mid 7 \mid 0)$ der Pyramide sowie der Aufhängepunkt $K(5 \mid 7 \mid 32)$ gegeben.

Die Längeneinheit beträgt 1 cm.




**1.** Geben Sie die Koordinaten des Punktes *C* an.

**2.** Berechnen Sie die Länge der Aufhängeschnur $\overline{KA}$ und das Maß des Winkels zwischen den Aufhängeschnüren $\overline{KA}$ und $\overline{KB}$.

**3.** Die Seitenflächen des Teelichthalters bestehen aus buntem Glas.

3.1 Stellen Sie eine Parametergleichung und eine Koordinatengleichung der Ebene $e_1$ auf, in der die Seitenfläche *ASB* liegt.
Zur Kontrolle und weiteren Verwendung: $e_1\colon 2x_1 - x_3 = 10$

3.2 Berechnen Sie den Inhalt der Seitenfläche *ASB*.

**4.** Ein Teelicht wird auf einer rechteckigen gläsernen Platte mit den Eckpunkten *E*, *F*, *G* und *H* innerhalb des Halters abgestellt (siehe Abbildung). Diese Platte verläuft parallel zur Grundfläche der Pyramide und befindet sich in halber Pyramidenhöhe oberhalb der Spitze *S*.

4.1 Begründen Sie, dass $x_3 = 5$ eine Koordinatengleichung der Ebene $e_2$ ist, in der die Fläche *EFGH* liegt.

4.2 Handelsübliche zylinderförmige Teelichter haben einen Durchmesser von 4 cm.
Begründen Sie, dass solche Teelichter auf die Platte *EFGH* passen.

**5.** Wenn das Teelicht genau in der Mitte der rechteckigen Platte steht und angezündet wird, befindet sich die Spitze der Flamme ungefähr im Punkt $P(5 \mid 7 \mid 9)$.
Damit sich die Seitenflächen des Teelichthalters nicht zu stark erhitzen, soll die Flammenspitze mindestens 3,5 cm von den Seitenflächen entfernt sein.

Prüfen Sie rechnerisch, ob diese Bedingung für die Seitenfläche *ASB* erfüllt ist.

# L ö s u n g e n

**1. Koordinaten des Punktes *C*** **1,0 Punkte**

Abgelesener Punkt: $C(0 \mid 14 \mid 10)$ ($x_1$- und $x_3$-Koordinaten wie $D$, $x_2$-Koordinate wie $B$)

Alternative: $\vec{c} = \vec{d} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}$

**2. Länge einer Aufhängeschnur und das Maß des Winkels zwischen den Schnüren** **3,5 Punkte**

- *Längenberechnung* (1,0 P)

$$|\overrightarrow{KA}| = |\vec{a} - \vec{k}| = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 32 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -22 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25+47+484} = \sqrt{558} \approx 23{,}62$$

Die Schnur ist rund 23,6 cm lang.

- *Winkelberechnung* (2,5 P)

Es gilt außerdem $\overrightarrow{KB} = \vec{b} - \vec{k} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -22 \end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich nach der Winkelformel:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB}}{\left|\overrightarrow{KA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{KB}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -22 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -22 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -22 \end{pmatrix}\right|} = \frac{25-49+484}{\sqrt{558} \cdot \sqrt{558}} \approx 0{,}8244$$

Damit folgt: $\alpha \approx 34{,}48°$.

**3.1 Parameter- und Koordinatengleichung der Ebene, in der die Seitenfläche *ASB* liegt** **3,0 Punkte**

- *Parametergleichung* (1,5 P)

Richtungsvektoren: $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} = \vec{u}$ und

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Parametergleichung: $e_1$: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- *Koordinatengleichung* (1,5 P)

  Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

  Normalengleichungen:

  - Punktnormalengleichung: $e_1$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right) = 0$
  - Allgemeine Normalengleichung: $e_1$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 10 = 0$
  - Koordinatengleichung: $e_1$: $2x_1 - x_3 = 10$

**3.2 Flächeninhalt der Seitenfläche *ASB*** **1,5 Punkte**

Nach der Formel für den Inhalt einer Dreiecksfläche ergibt sich:

$$\mu(A) = \tfrac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{AB}| = \tfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \tfrac{1}{2} \cdot 14 \cdot \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= 7 \cdot \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = 7 \cdot 5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= 35 \cdot \sqrt{4+0+1} = 35\sqrt{5} \approx 78{,}26$$

Die Seitenfläche hat einen Inhalt von rund 78,26 $cm^2$.

**4.1 Koordinatengleichung der Ebene, in der die Fläche *EFGH* liegt** **1,5 Punkte**

Alle Punkte der Grundfläche ABCD der Pyramide haben die $x_3$-Koordinate 10 und liegen somit in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 10$ (Parallelebene zur $x_1$-$x_2$-Ebene).

Die Pyramidenspitze liegt in der $x_1$-$x_2$-Ebene. Die Fläche *EFGH* befindet sich in halber Pyramidenhöhe, somit hat $e_2$ die Gleichung $x_3 = 5$.

<u>Alternative</u>: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor zu $e_2$ und $S'(5 \mid 7 \mid 5)$ liegt in $e_2$.

$S'$ entsteht aus $S$ durch Verschiebung um 5 Längeneinheiten in $x_3$-Richtung.

Gleichung für $e_2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow x_3 - 5 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 5$

**4.2 Teelichter auf der Platte *EFGH*** **2,0 Punkte**

*E, F, G* und *H* sind die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$ und $\overline{DS}$:

$$\vec{e} = \tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{s}) = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 3{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad ; \text{ also } E(7{,}5 \mid 3{,}5 \mid 5)$$

$$\vec{f} = \tfrac{1}{2}(\vec{b} + \vec{s}) = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 10{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad ; \text{ also } F(7{,}5 \mid 10{,}5 \mid 5)$$

$$\vec{g} = \tfrac{1}{2}(\vec{c} + \vec{s}) = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 10{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad ; \text{ also } G(2{,}5 \mid 10{,}5 \mid 5)$$

$$\vec{h} = \tfrac{1}{2}(\vec{d} + \vec{s}) = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad ; \text{ also } H(2{,}5 \mid 3{,}5 \mid 5)$$

Für die Rechteckseiten gilt: $|\overline{EF}| = 7\text{cm}$ (Differenz der $x_2$-Koordinaten)
$|\overline{EH}| = 5\text{cm}$ (Differenz der $x_1$-Koordinaten)

Beide Seiten sind länger als 4 cm. Daher passen solche Teelichter auf die Platte.

<u>Alternative</u>: Wegen der Ähnlichkeit der Rechtecke *ABCD* und *EFGH* (Streckfaktor 0,5) sind die Seiten des Rechtecks *EFGH* halb so lang wie die der Grundfläche *ABCD*, also:

$$|\overline{EF}| = 0{,}5 \cdot |\overline{AB}| = 0{,}5 \cdot 14\text{cm} = 7\text{cm}$$

$$|\overline{EH}| = 0{,}5 \cdot |\overline{AD}| = 0{,}5 \cdot 10\text{cm} = 7\text{cm}$$

**5. Abstand zur Seitenfläche *ASB*** **2,5 Punkte**

Gesucht ist der Abstand des Punktes $P(5 \mid 7 \mid 9)$ zur Seitenfläche *ASB*, welche durch die Ebene $e_1$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 10 = 0$ beschrieben wird.

*1. Möglichkeit*: Verwendung der Abstandsformel

Ein Punkt von $e_1$ ist z. B. $A(10 \mid 0 \mid 10)$.

Abstandsformel: $d(P\,;e) = |\,\vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{PA}\,| = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot |\,\vec{n} \cdot \overrightarrow{PA}\,|$

Dabei gilt: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $|\,\vec{n}\,| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = 5$

$$\overrightarrow{PA} = \vec{a} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich: $d(P\,;e) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot |\,9\,| \approx 4{,}02$ (LE) .

*2. Möglichkeit*: Anwendung der Lotgeradenmethode

Lotgerade $l$: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Einsetzen in die Gleichung von $e_1$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] - 10 = 0 \Leftrightarrow 1 + 5\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1{,}8$$

Lotfußpunkt: $\vec{l} = \vec{p} + 1{,}8 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + 1{,}8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}6 \\ 7 \\ 7{,}2 \end{pmatrix}$

(Die konkrete Berechnung der Koordinaten von $L$ ist nicht unbedingt erforderlich. Der gesuchte Abstand ergibt schon allein aus dem Parameterwert $\lambda = 1{,}8$)

Es folgt: $d(P\,;e) = d(P\,;L) = |\,\overrightarrow{PL}\,| = |\,\vec{l} - \vec{p}\,|$

$= |\,1{,}8 \cdot \vec{n}\,| = 1{,}8 \cdot |\,\vec{n}\,| = 1{,}8 \cdot \sqrt{5} \approx 4{,}02$

Der gesuchte Abstand beträgt rund 4 cm, die geforderte Bedingung ist damit erfüllt.

# Aufgabe 3
# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

**1.** Vor der Einführung des neuen Medikaments *Gubetro* wurde dessen Wirksamkeit in mehreren umfassenden Studien untersucht. Eine der Studien betraf die möglicherweise unterschiedliche Wirksamkeit des Medikaments bei Frauen und Männern.

Dazu wurde das Medikament an insgesamt 6900 Personen getestet. Davon waren 3400 Personen weiblich. Bei 5172 der getesteten Personen zeigte das Medikament Erfolg.

1.1 Die Studienergebnisse sollen in der folgenden Vierfeldertafel wiedergegeben werden. Tragen Sie die fehlenden Werte ein.

| | Erfolg (E) | Kein Erfolg ($\overline{E}$) | |
|---|---|---|---|
| Männlich (M) | | 1055 | |
| Weiblich (W) | | | |
| | | | |

1.2 Erklären Sie die Bedeutung der in der Vierfeldertafel eingetragenen Zahl 1055 im Sachzusammenhang.

1.3 Es wird eine der 6900 Testpersonen zufällig ausgewählt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Medikament *Gubetro* bei dieser Testperson in der Studie Erfolg hatte.

1.4 Aus den 6900 Testpersonen wird eine Frau zufällig ausgewählt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass *Gubetro* bei ihr in der Studie keinen Erfolg hatte.

1.5 Überprüfen Sie, ob bei dieser Studie die erfolgreiche Wirkung des Medikaments vom Geschlecht der Testperson abhängig war.

**2.** Das schon zugelassene Schmerzmittel *Spürnix* wirkt bei durchschnittlich 80% der Patienten.
Ein Arzt verschreibt *Spürnix* an 20 Patienten.

2.1 Berechnen Sie, bei wie vielen dieser Patienten er eine Wirksamkeit des Medikaments erwarten kann?

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass *Spürnix* bei allen 20 Patienten wirkt.

2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass *Spürnix* bei mindestens 18 der 20 Patienten wirkt.

2.4 Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage:

„Dass *Spürnix* bei wenigstens einem der 20 Patienten wirkt, ist so gut wie sicher.“

Belegen Sie Ihre Stellungnahme durch eine passende Rechnung.

# L ö s u n g e n

## 1. Einführung eins neuen Medikaments *Gubetro*

### 1.1 Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten **2,0 Punkte**

| | Erfolg (E) | Kein Erfolg ($\overline{E}$) | |
|---|---|---|---|
| Männlich (M) | 2445 | 1055 | 3500 |
| Weiblich (W) | 2727 | 673 | 3400 |
| | 5172 | 1728 | 6900 |

### 1.2 Bedeutung der Zahl 1055 im Sachzusammenhang **1,0 Punkte**

Ein einzelnes Feld in der Tafel steht für ein UND-Ereignis.

Die eingetragene Zahl gibt die Anzahl der Personen an, die männlich sind und bei denen das Medikament ohne Erfolg blieb.

### 1.3 Medikament *Gubetro* hat Erfolg **1,0 Punkte**

Anhand der Tabelle ergibt sich:

$$P(\mathrm{E}) = \frac{5172}{6900} \approx 0{,}7496 = 74{,}96\%$$

### 1.4 Wahrscheinlichkeit, dass *Gubetro* bei ausgewählter Frau erfolglos ist **1,5 Punkte**

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist: $\overline{\mathrm{E}}$ (kein Erfolg)
Bedingung: W (Eine Frau wird ausgewählt.)

Damit ergibt sich:

$$P_{\mathrm{W}}(\overline{\mathrm{E}}) = P(\overline{\mathrm{E}}\,|\mathrm{W}) = \frac{|\overline{\mathrm{E}} \cap \mathrm{W}|}{|\mathrm{W}|} = \frac{673}{3400} \approx 0{,}1979 = 19{,}79\%$$

### 1.5 Test auf Unabhängigkeit **2,0 Punkte**

Es gilt: $P(\mathrm{E} \cap \mathrm{W}) = \frac{2727}{6900} \approx 39{,}52\%$

$$P(\mathrm{E}) \cdot P(\mathrm{W}) = \frac{5172}{6900} \cdot \frac{3400}{6900} \approx 36{,}94\% \neq P(\mathrm{E} \cap \mathrm{W})$$

Die erfolgreiche Wirkung des Medikaments ist vom Geschlecht der Testperson abhängig.

## 2. Schmerzmittel *Spürnix*

Zufallsgröße $X$: Anzahl der Patienten, bei denen das Medikament wirkt
Interpretation: Binomialverteilte Zufallgröße mit $n = 20$ und $p = 0{,}8$

### 2.1 Berechnung des Erwartungswerts **1,5 Punkte**

Es gilt: $\mathrm{E}(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}8 = 16$

### 2.2 Wirksamkeit bei allen Patienten **1,5 Punkte**

$$P(X = 20) = \binom{20}{20} \cdot 0{,}8^{20} \cdot 0{,}2^{0} = 0{,}8^{20} \approx 0{,}0115 = 1{,}15\%$$

### 2.3 Wirksamkeit bei mindestens 18 Patienten **2,5 Punkte**

Gesucht ist eine Summenwahrscheinlichkeit:

$P(18 \leq X \leq 20) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20)$

$$= \binom{20}{18} \cdot 0{,}8^{18} \cdot 0{,}2^{2} + \binom{20}{19} \cdot 0{,}8^{19} \cdot 0{,}2^{1} + 0{,}8^{20}$$

$$\approx 0{,}1369 + 0{,}0576 + 0{,}0115$$

$$= 0{,}2060 = 20{,}6\%$$

### 2.4 Stellungnahme **2,0 Punkte**

Für die Wahrscheinlichkeit, dass das Medikament bei mindestens einem Patienten wirkt, ergibt sich:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0{,}8^{0} \cdot 0{,}2^{20} = 1 - 0{,}2^{20} \approx 1 = 100\%$$

Die Aussage stimmt somit.

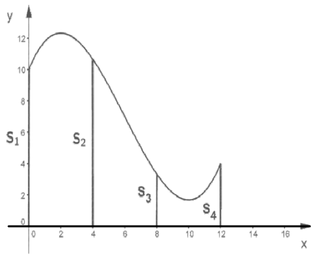
# Schriftliche Abiturprüfung 2015

## G-Kurs

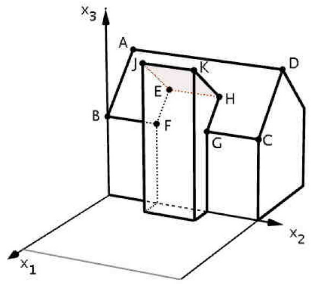
## Nachtermin

**Themenübersicht**

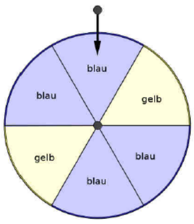
- <u>Aufgabe 1</u>: **Analysis**
  - Untersuchung der ganzrationalen Funktion $f(x)=\frac{1}{24}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{2}x+10$
  - Modellierung: Teilstück einer Achterbahn
  - Untersuchung der ln-Funktion $g(x)=(5-x)\cdot\ln(x)$
  - Argumentieren am Graphen einer Ableitungsfunktion




- <u>Aufgabe 2</u>: **Analytische Geometrie**
  - Mittelpunktsberechnung
  - Abstand Punkt-Ebene
  - Winkel zwischen Geraden
  - Schattenpunkt




- <u>Aufgabe 3</u>: **Stochastik**
  - Erstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel (mit absoluten Werten)
  - Bernoulli-Kette
  - Wahrscheinlichkeiten bei einem Glücksrad
  - Wertemenge und Erwartungswert einer Zufallsgröße




www.softfrutti.de

# Aufgabe 1
# ANALYSIS

**1.** Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{24}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 10$ .

1.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion *f* an.
Untersuchen Sie *f* auf Symmetrie (zum Ursprung, zur *y*-Achse).

1.2 Begründen Sie mit Hilfe des Funktionsterms das Grenzwertverhalten der Funktion *f* für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$.

1.3 Untersuchen Sie *f* auf Extrempunkte (einschließlich ihrer Art).

1.4 Der Graph der Funktion *f* beschreibt im Intervall [0 ; 12] (siehe Abb.1) annähernd ein Teilstück einer Achterbahn. (Längeneinheit 1m).

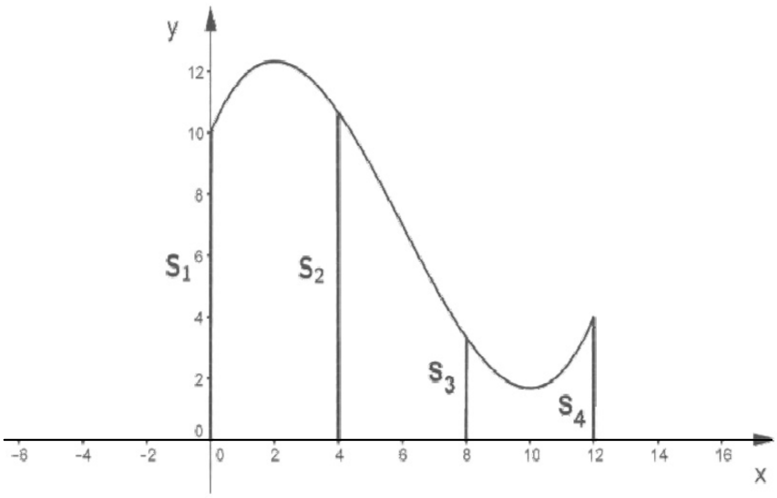



Abb.1: Graph der Funktion *f* im Intervall [ 0 ; 12 ]

1.4.1 Bestimmen Sie den maximalen Höhenunterschied der Achterbahn im Intervall [0 ; 12].

1.4.2 Bestimmen Sie den Punkt der Achterbahn, in dem es am steilsten bergab geht.

1.4.3 Das dargestellte Teilstück der Achterbahn wird durch vier vertikal verlaufende Stützen stabilisiert, die im Abstand von jeweils 4 m aufgestellt sind (siehe Abb.1).
Berechnen Sie die Längen der Stützen $S_1$ und $S_3$.

1.4.4 Zwischen der Stütze $S_1$ und der Stütze $S_3$ wird eine ebene Verkleidung angebracht, die die gesamte Querschnittsfläche zwischen dem Boden (*x*-Achse) und der Achterbahn innerhalb der beiden Stützen bedecken soll.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Verkleidung.

Hinweis: Bei der Berechnung eines Integrals ist eine Stammfunktion anzugeben.

1.4.5 Die Wagen der Achterbahn werden längs einer geradlinigen Verbindung vom Boden bis zum Punkt (0 | 10) hochgezogen. Dieser geradlinige Teil ist in der Abbildung nicht dargestellt. Er mündet im Punkt (0 | 10) tangential in die Achterbahn.

Stellen Sie die Gleichung der zugehörigen Geraden auf und zeichnen Sie das Verbindungsstück in die Abbildung ein.

**2.** Gegeben ist die Funktion $g: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = (5-x)\cdot\ln(x)$ .

2.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion *g* an.

2.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion *g*.

2.3 Begründen Sie mit Hilfe des Funktionsterms das Grenzwertverhalten der Funktion *g* an den Rändern der maximalen Definitionsmenge.

2.4 Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion *g* rechtsgekrümmt ist.

**2.5** Skizzieren Sie unter Berücksichtigung der vorliegenden Ergebnisse den Graph der Funktion *g*.

**3.** Die Abbildung 2 zeigt den Graph der **Ableitungsfunktion** *h′* einer Funktion *h*.

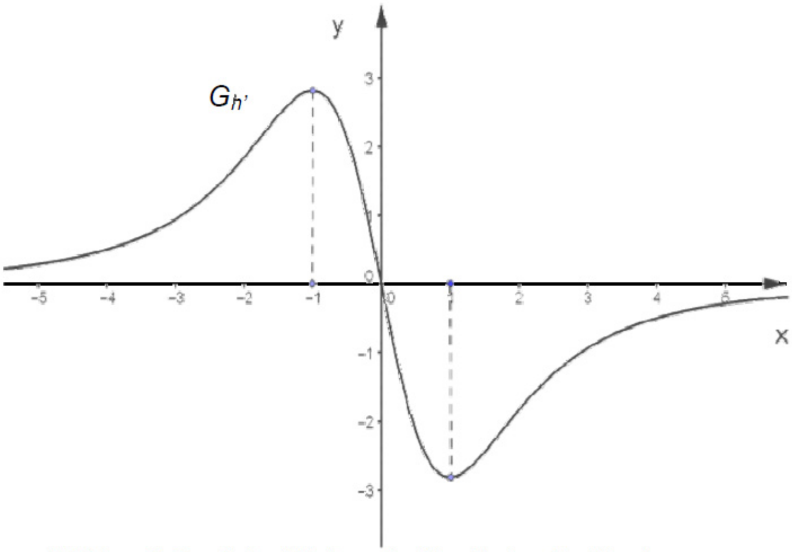


Abbildung 2: Graph der Ableitungsfunktion *h*‘ einer Funktion *h*

Prüfen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.
Begründen Sie Ihre Antworten.

3.1 Die Funktion *h* hat an der Stelle 0 ein lokales Maximum.

3.2 Die Funktion *h* hat an der Stelle 1 ein lokales Minimum.

3.3 Die Stelle –1 ist eine Wendestelle des Graphen der Funktion *h*.

# L ö s u n g e n

## 1. Untersuchung einer ganzrationalen Funktion *f*

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{24}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 10$ .

### 1.1 $D_{\max}$, Nullstelle und Symmetrie — **1,5 Punkte**

- *Maximale Definitionsmenge* (0,5 P)
  $D_{\max} = \mathbb{R}$ (, da *f* eine ganzrationale Funktion ist.)
- *Symmetrie* (1,0 P)
  *f* ist weder symmetrisch zur *y*-Achse noch zum Ursprung O, weil der Term gerade und ungerade Potenzen von *x* enthält.
  <u>Alternative</u>: asymmetrische Lage der Extremstellen (vgl. später)

### 1.2 Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ — **1,0 Punkte**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(Das Grenzwertverhalten der ganzrationalen Funktion *f* wird bestimmt durch den Term $x^3$ mit der höchsten Potenz von *x*.)

### 1.3 Bestimmung der Extrempunkte — **5,0 Punkte**

*Ableitung* (1,0 P)

$$f'(x) = \frac{1}{24}\cdot 3x^2 - \frac{3}{4}\cdot 2x + \frac{5}{2}\cdot 1 = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$
$$= \frac{1}{8}(x^2 - 12x + 20) = \frac{1}{8}(x-2)(x-10)$$

- *Notwendige Bedingung* (1,5 P)
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \lor x = 10$ (beide mit Vzw.) (vgl. Faktorisierung)
- *Hinreichende Bedingung* (1,5 P)
  Vorzeichentabelle:

| $x$ | | 2 | | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| | | mit Vzw. | | mit Vzw. | |
| | | HP | | TP | |

Testwert: $f'(0) = 2{,}5 > 0$

- *Angabe der Extrempunkte* (1,0 P)
  2 ist lokale Maximumstelle ; $f(2) = 12\frac{1}{3}$ ; Hochpunkt $H(2 \mid 12\frac{1}{3})$
  10 ist lokale Minimumstelle ; $f(10) = 1\frac{2}{3}$ ; Tiefpunkt $T(10 \mid 1\frac{2}{3})$

### 1.4.1 Höhenunterschied im Intervall [0 ; 12] — **1,0 Punkte**

Differenz der Funktionswerte von *H* und *T*: $f(2) - f(10) = 12\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3} = 10\frac{2}{3}$

### 1.4.2 Punkt, in dem es am steilsten bergab geht — **3,0 Punkte**

Infrage kommt der Wendepunkt des Graphen von *f*.

- *Zweite Ableitung* (1,0 P)
  $f''(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}(x-6)$
- *Notwendige Bedingung* (0,5 P)
  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (mit Vzw.) (vgl. Faktorisierung)

- *Hinreichende Bedingung* (0,5 P)
  Wegen des Vorzeichenwechsels liegt eine Wendestelle vor.
- *Entscheidung* (1,0 P)
  Es gilt $f(6) = 7$ und $f'(6) = -1$. Der Punkt $W(6 \mid 7)$ ist also ein Wendepunkt mit negativer Steigung und daher der gesuchte Punkt.

**1.4.3 Länge der Stützen $S_1$ und $S_3$** **1,0 Punkte**

Länge der Stütze $S_1$: $f(0) = 10$ (in m)

Länge der Stütze $S_3$: $f(8) = 3\frac{1}{3}$ (in m)

**1.4.4 Flächeninhalt der Verkleidung** **3,0 Punkte**

$$\mu(A) = \int_0^8 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{96}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + 10x\right]_0^8 = \left(\frac{1}{96}\cdot 8^4 - \frac{1}{4}\cdot 8^3 + \frac{5}{4}\cdot 8^2 + 10\cdot 8\right) - 0$$

$$= 74\frac{2}{3} \quad (\text{in m}^2)$$

**1.4.5 Tangentiale Mündung in die Achterbahn** **2,0 Punkte**

Die gesuchte Gerade ist die Tangente im Punkt $(0 \mid 10)$.

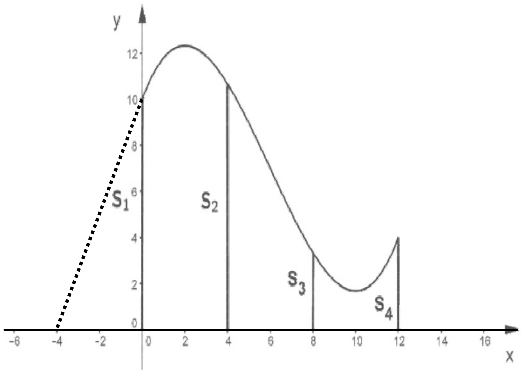
Allgemeine Tangentengleichung:

$$t\colon y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$$

Hier sind $x_0 = 0$ und $f(x_0) = 10$ unmittelbar gegeben. Weiter folgt $f'(x_0) = f'(0) = 2{,}5$.

Damit ergibt sich:

$$t\colon y = 2{,}5\,(x - 0) + 10 = 2{,}5x + 10$$




Das Verbindungsstück ist in der Abbildung die gestrichelt gezeichnete Strecke mit den Endpunkten $(-4 \mid 0)$ und $(0 \mid 10)$.

**2. Untersuchung einer ln-Funktion**

Betrachtet wird die Funktion $g(x) = (5 - x)\cdot \ln(x)$.

**2.1 Maximale Definitionsmenge** **1,0 Punkte**

$D_{\max} = \mathbb{R}^+$ (Der Term $\ln(x)$ ist nur definiert für $x > 0$.)

**2.2 Nullstelle** **1,5 Punkte**

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (5 - x)\cdot \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \ \vee \ x = 1$$

**2.3 Grenzwerte** **2,0 Punkte**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [\underbrace{(5 - x)}_{\downarrow\ -\infty} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{\downarrow\ +\infty}] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [\underbrace{(5 - x)}_{\downarrow\ 5} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{\downarrow\ -\infty}] = -\infty$$

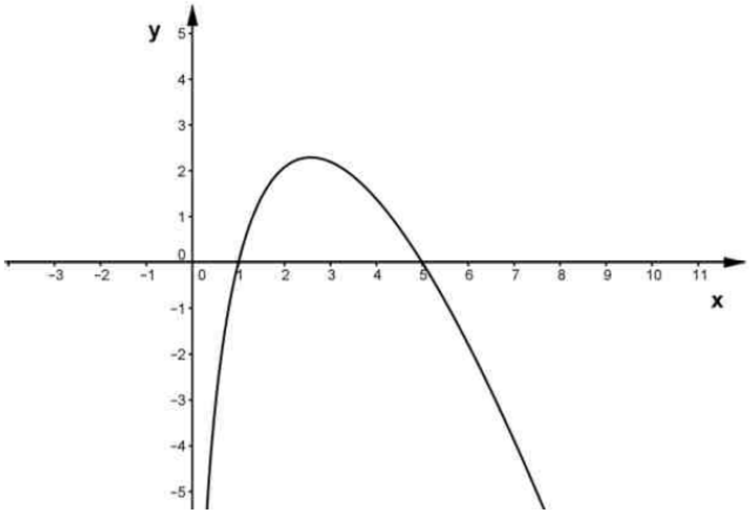
**2.4 Rechtskrümmung** **3,0 Punkte**

Ableitungen: $g'(x) = -\ln(x) + (5-x)\cdot\frac{1}{x} = -\ln(x) + \frac{5}{x} - 1$ (Produktregel)

$$g''(x) = -\frac{1}{x} + \left(-\frac{5}{x^2}\right) = -\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt $g''(x) < 0$. Dies bedeutet, dass der Graph von $g$ in $\mathbb{R}^+$ rechtsgekrümmt ist.

**2.5 Graph** **2,0 Punkte**




**3. Graph einer Ableitungsfunktion**

Zur Überprüfung der Aussagen kann es vorteilhaft sein, die Informationen aus dem gegebenen Graphen von $h'$ in eine Vorzeichentabelle für $h'$ zu übertragen.

Vorzeichentabelle für $h'(x)$:

| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | + | 0 | – |
| | | mit Vzw.<br>HP | |

**3.1 Lokales Maximum an der Stelle 0** **1,0 Punkte**

$h'$ hat an der Stelle 0 einen Vorzeichenwechsel der Form + 0 – . Daher ist die Aussage richtig.

**3.2 Lokales Maximum an der Stelle 1** **1,0 Punkte**

$h'$ hat an der Stelle 1 keine Nullstelle. Daher ist die Aussage falsch.

**3.3 Wendestelle an der Stelle –1** **1,0 Punkte**

$h'$ besitzt an der Stelle –1 eine Extremstelle. Daher ist die Aussage richtig.

# Aufgabe 2
# ANALYTISCHE GEOMETRIE

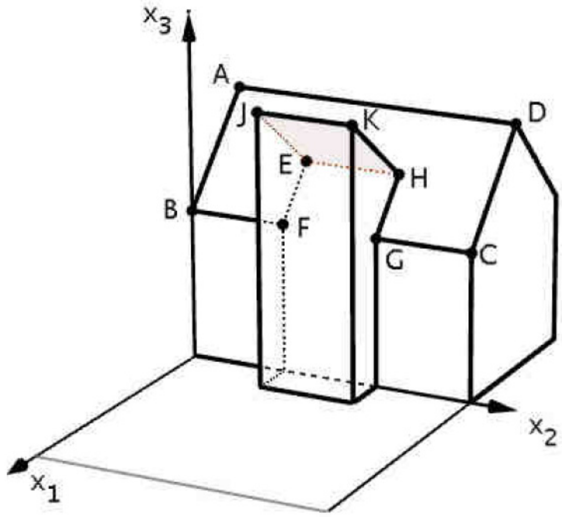
Familie Maurer plant einen Gartenpavillon in Form eines Quaders mit aufgesetztem Dreiecksprisma.

Der Eingang von der quadratischen Terrasse soll durch einen Anbau mit schrägem, rechteckigem Vordach erfolgen.

Im Plan des Architekten (siehe Abbildung) liegt die Terrasse in der $x_1$-$x_2$-Ebene und es sind folgende Punkte gegeben:

$A(-2 \mid 0 \mid 5)$ , $B(0 \mid 0 \mid 3)$ , $C(0 \mid 6 \mid 3)$,
$G(0 \mid 4 \mid 3)$ , $J(1 \mid 2 \mid 5{,}5)$ , $K(1 \mid 4 \mid 5{,}5)$.

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.




**1.** Geben Sie die Koordinaten des Punktes $D$ an.

**2.** Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene $e_1$, in der die Dachfläche $ABCD$ liegt, in Parameterform und in Koordinatenform.
(Zur Kontrolle und weiteren Verwendung: $e_1$: $x_1 + x_3 = 3$)

**3.** Zur Planung werden weitere Angaben benötigt. Berechnen Sie:

3.1 die Länge und den Mittelpunkt der Kante $\overline{AB}$ .

3.2 den Abstand des Punktes $K$ von der Dachfläche $ABCD$.

**4.** Das Vordach $EHKJ$ (grau markierte Fläche) liegt in einer Ebene $e_2$, welche durch die Gleichung $3x_1 - 4x_3 = -19$ beschrieben wird.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden $g$, auf der die Kante $\overline{EH}$ liegt.

**5.** Berechnen Sie für $H(-1 \mid 4 \mid 4)$ den Winkel, unter dem sich die Dachkanten $\overline{HG}$ und $\overline{HK}$ schneiden.

**6.** Am Nachmittag fallen als parallel zu betrachtende Sonnenstrahlen entlang des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ auf das Grundstück.

Berechnen Sie den Schattenpunkt des Punktes $K$ in der Terrassenebene und entscheiden Sie begründet, ob der Schatten des Vordachs $EHKJ$ zu diesem Zeitpunkt vollständig auf der Terrasse liegt.

# L ö s u n g e n

**1. Koordinaten des Punktes *D*** **1,0 Punkte**

Abgelesener Punkt: $D(-2 \mid 6 \mid 5)$ ($x_1$- und $x_3$-Koordinaten wie $A$, $x_2$-Koordinate wie $C$)

*Alternative*: $\vec{d} = \vec{c} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

**2. Parameter- und Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche *ABCD* liegt** **3,0 Punkte**

- *Parametergleichung* (1,5 P)
  - Richtungsvektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

    $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
  - Parametergleichung: $e_1$: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
- *Koordinatengleichung* (1,5 P)
  - Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - Normalengleichungen:
    - Punktnormalengleichung: $e_1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0$
    - Allgemeine Normalengleichung: $e_1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0$
    - Koordinatengleichung: $e_1$: $x_1 + x_3 = 3$

**3.1 Länge und Mittelpunkt der Kante $\overline{AB}$** **2,0 Punkte**

- *Längenberechnung* (1,0 P)

  $|\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$ (Meter)

  Die Kante ist rund 2,83 m lang.

*Mittelpunktsberechnung* (1,0 P)

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ also } M(-1 \mid 0 \mid 4).$$

**3.2 Abstand des Punktes *K* zur Dachfläche *ABCD*** **2,5 Punkte**

Gesucht ist der Abstand des Punktes $K(1 \mid 4 \mid 5{,}5)$ zur Dachfläche *ABCD*, welche durch die Ebene $e_1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0$ beschrieben wird.

*1. Möglichkeit*: Verwendung der Abstandsformel

Ein Punkt der Ebene ist z. B. der gegebene Punkt $A(-2 \mid 0 \mid 5)$.

Abstandsformel: $d(P\,;e) = |\,\vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{KA}\,| = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot |\,\vec{n} \cdot \overrightarrow{KA}\,|$

Dabei gilt: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $|\,\vec{n}\,| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\overrightarrow{KA} = \vec{a} - \vec{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich: $d(P\,;e) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |-3{,}5| \approx 2{,}47$

*2. Möglichkeit*: Anwendung der Lotgeradenmethode

Lotgerade $l$: $\vec{x} = \vec{k} + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einsetzen in die Gleichung von $e_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 3 = 0 \iff 6{,}5 + 2\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = -1{,}75$$

Lotfußpunkt: $\vec{l} = \vec{p} - 1{,}75 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} - 1{,}75 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}75 \\ 4 \\ 3{,}75 \end{pmatrix}$

(Die konkrete Berechnung der Koordinaten von *L* ist nicht unbedingt erforderlich. Der gesuchte Abstand ergibt schon allein aus dem Parameterwert $\lambda = -1{,}75$)

Es folgt: $d(K\,;e) = d(K\,;L) = |\,\overrightarrow{KL}\,| = |\,\vec{l} - \vec{k}\,|$

$= |-1{,}75 \cdot \vec{n}\,| = 1{,}75 \cdot |\,\vec{n}\,| = 1{,}75 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}47$

Der gesuchte Abstand beträgt rund 2,47 m.

**4. Gleichung der Geraden, auf der die Kante $\overline{EH}$ liegt** **3,0 Punkte**

Die gesuchte Gerade $g$ ergibt sich als Schnittmenge der Dachebene $e_1$ mit der Ebene $e_2$:

$$e_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_2\colon \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 19 = 0$$

(Parametergleichung gemäß 2.) (Punktnormalengleichung nach Angabe)

Eine Gleichung der Schnittgeraden ergibt sich mithilfe des Einsetzungsverfahrens.
Durch Einsetzen der Gleichung von $e_1$ in die Gleichung von $e_2$ folgt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + 19 = 0 \Leftrightarrow -26 + 7\lambda + 7\mu + 19 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1 - \lambda$$

Einsetzen in die Gleichung von $e_1$ liefert:

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**5 Winkel, unter dem sich die Dachkanten $\overline{HG}$ und $\overline{HK}$ schneiden** **1,5 Punkte**

Für die Richtungsvektoren gilt: $\overrightarrow{HG} = \vec{g} - \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{HG} = \vec{k} - \vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

Der gesuchte Winkel ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{HG}$.
Nach der Winkelformel ergibt sich:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{HK}}{\left|\overrightarrow{HG}\right| \cdot \left|\overrightarrow{HK}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2+0-1{,}5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6{,}25}} \approx 0{,}1414$$

Damit folgt: $\alpha \approx 81{,}87°$.

**6. Schattenpunkt von *K* in der Terrassenebene** **2,0 Punkte**

Sonnenstrahl durch den Punkt *K*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Der Schnitt mit der Terrassenebene ($x_1$-$x_2$-Ebene mit der Gleichung $x_3 = 0$) ergibt:

$$5{,}5 + \sigma \cdot (-3) = 0 \;\Leftrightarrow\; 5{,}5 = 3\sigma \;\Leftrightarrow\; \sigma = \frac{5{,}5}{3} = \frac{11}{6}$$

Damit ergibt sich für den Schattenpunkt $K'$ von $K$:

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + \frac{11}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{23}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{, also} \quad K'(4\tfrac{2}{3} \mid 7\tfrac{2}{3} \mid 0)\,.$$

Die Seitenlänge der quadratischen Terrasse ist 6m. Die $x_2$-Koordinate von $K'$ ist größer als 6m. Der Schatten liegt daher nicht komplett auf der Terrasse.

# Aufgabe 3
# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

**1.** Ein Badeort bietet Übernachtungsmöglichkeiten für 2400 Gäste. In der Hochsaison ist der Ort seit Jahren ausgebucht. Man weiß aus Erfahrung, dass von den 2400 Gästen etwa 1600 Gäste im Laufe eines Tages den Strand und 1700 Gäste die Geschäfte in der Fußgängerzone besuchen.

1.1 Das Besuchsverhalten der Gäste soll in der folgenden Vierfeldertafel wiedergegeben werden. Tragen Sie die fehlenden Werte ein.

| | Strandbesuch $S$ | Kein Strandbesuch $\overline{S}$ | |
|---|---|---|---|
| Besuch der Fuß-Fußgängerzone $F$ | | | |
| Kein Besuch der Fußgängerzone $\overline{F}$ | | 300 | |
| | | | |

1.2 Erklären Sie die Bedeutung der in der Vierfeldertafel eingetragenen Zahl 300 im Sachzusammenhang.

1.3 Jeden Abend wird unter allen Gästen ein Besucher zufällig ausgewählt. Er erhält ein kleines Präsent.

1.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der ausgewählte Gast an diesem Tag sowohl am Strand als auch in der Fußgängerzone war.

1.3.2 Der ausgewählte Gast schwärmt von den tollen Wellen, die er heute am Strand genießen konnte. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er auch die Fußgängerzone besuchte.

1.4 Beschreiben Sie verbal das folgende Ereignis und bestimmen Sie dessen Wahrscheinlichkeit:

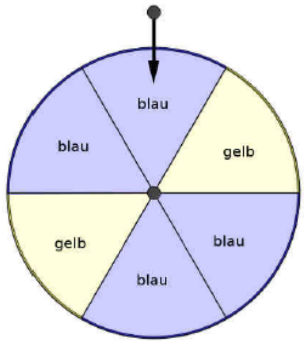
$$(\overline{S} \cap F) \cup (S \cap \overline{F}).$$

**2.** Am Eingang des Strandes ist ein Spender mit kleinen Plastiktüten angebracht, an dem sich Hundebesitzer versorgen können. Im Schnitt nimmt jeder dritte Hundebesitzer eine Tüte, wenn er den Strand betritt. Bei Tagesanbruch befinden sich zehn Tüten im Spender. Im Laufe des Tages kommen 30 Hundebesitzer an den Strand.

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass an diesem Tag genau zehn Tüten aus dem Spender entnommen werden.

2.2 Nehmen Sie begründet Stellung zur Aussage: „Die Anzahl der Tüten an diesem Tag ist ausreichend, denn sie entspricht dem Erwartungswert.“

**3.** Zur Unterstützung des örtlichen Kindergartens hat sich die Gemeinde ein Gewinnspiel ausgedacht. Nach jedem Drehen des abgebildeten Glücksrades zeigt der Pfeil eine der beiden Farben Blau oder Gelb an. Ein einzelnes Spiel besteht darin, das Glücksrad **dreimal** zu drehen.




3.1 Geben Sie die Ergebnismenge des dem Gewinnspiel zu Grunde liegenden Zufallsexperiments an.

3.2 Der Anteil der blauen Fläche auf dem Glücksrad ist doppelt so groß wie der Anteil der gelben Fläche.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse

3.2.1 Das Rad zeigt bei jeder der drei Drehungen die Farbe Blau an.

3.2.2 Das Rad zeigt bei mindestens einer der drei Drehungen die Farbe Gelb an.

3.3 Die Teilnahme an einem Spiel kostet drei Euro. Dabei erhält der Spieler für jeden erzielten Treffer der Farbe Gelb zwei Euro.

3.3.1 Die Zufallsgröße beschreibe den Gewinn bei einem Spiel aus der Sicht des Spielers. Geben Sie die Wertemenge an.

3.3.2 Bestimmen Sie den Gewinn, den die Gemeinde im Durchschnitt pro Spiel erzielt.

# L ö s u n g e n

## 1. Gäste in einem Badeort

### 1.1 Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten **2,0 Punkte**

| | $S$ | $\overline{S}$ | |
|---|---|---|---|
| $F$ | 1200 | 500 | 1700 |
| $\overline{F}$ | 400 | 300 | 700 |
| | 1600 | 800 | 2400 |

### 1.2 Bedeutung der Zahl 300 im Sachzusammenhang **0,5 Punkte**

Zahl der Gäste, die weder am Strand noch in der Fußgängerzone waren

### 1.3.1 Wahrscheinlichkeit, dass ein Gast sowohl am Stand als auch in der Fußgängerzone war **1,0 Punkte**

$$P(F \cap S) = \frac{1200}{2400} = 0{,}5 = 50\%$$

### 1.3.2 Wahrscheinlichkeit, dass der Gast auch in der Fußgängerzone war **1,0 Punkte**

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist: F (Gast war in der Fußgängerzone)
Bedingung: S (Gast war am Strand.)

Damit ergibt sich

$$P_S(F) = \frac{|F \cap S|}{|S|} = \frac{1200}{1600} = 0{,}75 = 75\%$$ (direktes Ablesen aus der Vierfeldertafel)

Alternative: Verwendung der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}5}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} = 75\%$$

### 1.4 Verbale Beschreibung und Berechnung der Wahrscheinlichkeit **1,5 Punkte**

$(\overline{S} \cap F) \cup (S \cap \overline{F})$: Ein Gast war entweder am Strand oder in der Fußgängerzone.

$$P\left((\overline{S} \cap F) \cup (S \cap \overline{F})\right) = \frac{500}{2400} + \frac{400}{2400} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$$

## 2. Hundebesitzer

Zufallsgröße $X$: Anzahl der Hundebesitzer am Strand, die eine Tüte entnehmen
Interpretation: Binomialverteilte Zufallgröße mit $n = 30$ und $p = 0{,}8$

### 2.1 Wahrscheinlichkeit, dass 10 Tüten entnommen werden **1,5 Punkte**

$$P(X = 10) = \binom{30}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{20} \approx 15{,}30\%$$

### 2.2 Deutung des Erwartungswertes **1,5 Punkte**

Für den Erwartungswert gilt: $E(X) = n \cdot p = 30 \cdot \frac{1}{3} = 10$

Der Erwartungswert gibt an, wie viele Tüten dem Spender im Mittel entnommen werden. Daraus kann nicht gefolgert werden, dass die zehn Tüten ausreichend sind.

## 3. Gewinnspiel

### 3.1 Ergebnismenge **1,0 Punkte**

$\Omega$ = { (b|b|b), (b|b|g), (b|g|b), (g|b|b), (b|g|g), (g|b|g), (g|g|b), (g|g|g) }

### 3.2.1 Rad zeigt bei jeder Drehung blau an. **1,0 Punkte**

$P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \approx 29{,}63\%$ mit $A$ = { (b|b|b) }

### 3.2.2 Rad zeigt einer bei mindestens einer der Drehungen gelb an. **1,0 Punkte**

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27} \approx 70{,}37\%$

### 3.3.1 Wertemenge der Zufallsgröße *X* **1,0 Punkte**

Die Zufallsgröße $X$ beschreibt den Gewinn bei einem Spiel aus der Sicht des Spielers.

$X(\Omega) = \{-3\,;\,-1\,;\,1\,;\,3\}$ (Der Einsatz von 3€ ist jeweils zu berücksichtigen.)

### 3.3.2 Durchschnittlicher Gewinn **2,0 Punkte**

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

| Zahl der Treffer | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x \in X(\Omega)$ | –3 | –1 | 1 | 3 |
| $P(X = x)$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{12}{27}$ | $\frac{6}{27}$ | $\frac{1}{27}$ |

Für den Erwartungswert folgt:

$$\mathrm{E}(X) = (-3)\cdot\frac{8}{27} + (-1)\cdot\frac{12}{27} + 1\cdot\frac{6}{27} + 3\cdot\frac{1}{27} = \frac{1}{27}\cdot(-24 - 12 + 6 + 3) = -1$$

Der Spieler verliert im Schnitt 1 Euro pro Spiel. Der durchschnittliche Gewinn der Gemeinde pro Spiel beträgt als 1 Euro.