1

# Einführung in die Stochastik

## Zufallsexperimente

1. a) ---
   b) Jonas gewinnt: Ungefähr 7 oder 8 Striche.
   Laura Gewinnt: Ungefähr 15 Striche.
   Nils gewinnt: Ungefähr 8 oder 7 Striche.

   c) ---

2.

| | |
|---|---|
| a) Werfen einer Münze.<br>Mögliche Ergebnisse:<br>w = Wappen liegt oben.<br>z = Zahl liegt oben.<br>Menge der möglichen Ergebnisse:<br>$\Omega = \{w, z\}$. | b) Drehen eines Glücksrades.<br>Mögliche Ergebnisse:<br>g = Zeiger bleibt im grauen Feld stehen.<br>s = Zeiger im schwarzen Feld.<br>w = Zeiger bleibt im weißen Feld stehen.<br>Menge der möglichen Ergebnisse:<br>$\Omega = \{g, s, w\}$. |
| c) Ziehen aus einer Urne.<br>Mögliche Ergebnisse:<br>1 = Eine Kugel mit der Nr. 1 wird gezogen.<br>2 = Eine Kugel mit der Nr. 2 wird gezogen.<br>3 = Eine Kugel mit der Nr. 3 wird gezogen.<br>4 = Eine Kugel mit der Nr. 4 wird gezogen.<br>Menge der möglichen Ergebnisse:<br>$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. | d) Werfen eines Würfels.<br>Mögliche Ergebnisse:<br>1 = Es wird eine 1 gewürfelt.<br>2 = Es wird eine 2 gewürfelt.<br>3 = Es wird eine 3 gewürfelt.<br>4 = Es wird eine 4 gewürfelt.<br>5 = Es wird eine 5 gewürfelt.<br>6 = Es wird eine 6 gewürfelt.<br>Menge der möglichen Ergebnisse:<br>$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. |

3. a) 6 = Es wird eine 6 gewürfelt.
$k$ = Es wird keine 6 gewürfelt.
$\Omega = \{\, 6, k \,\}$.

b) $g$ = Die Augenzahl ist gerade.
$u$ = Die Augenzahl ist ungerade.
$\Omega = \{\, g, u \,\}$.

c) 2 = Die Augensumme der beiden Würfel ist 2.
3 = Die Augensumme der beiden Würfel ist 3.
$\vdots$
12 = Die Augensumme der beiden Würfel ist 12.
$\Omega = \{\, 2, 3, 4 \ldots 11, 12 \,\}$.

4. a) $\Omega = \{\, 7, 8, 9, 10, B, D, K, A \,\}$.

b) $\Omega = \{\, K, P, C, H \,\}$.

c) $\Omega = \{\, \text{Bild, kein Bild} \,\}$.

5. a) $\Omega = \{\, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,\}$.

b) Jedes Ergebnis hat die gleiche Eintrittschance (nämlich $\frac{1}{7}$).

## Auswerten von Zufallsexperimenten

6. a)

| | |
|---|---|
| $b$ | Ungefähr 10-mal. |
| $g$ | Ungefähr 40-mal. |
| $r$ | Ungefähr 50-mal. |

b)

| Ergebnis | | absolute Häufigkeit | relative Häufigkeit |
|---|---|---|---|
| b | 𝍸 𝍸 \|\| | 12 | 0,12 |
| g | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 \|\| | 37 | 0,37 |
| r | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 \| | 51 | 0,51 |
| | Summe | 100 | 1 |

c)

| Ergebnis | | absolute Häufigkeit | relative Häufigkeit |
|---|---|---|---|
| b | 𝍸 \|\|\|\| | 9 | 0,09 |
| g | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 \|\|\|\| | 44 | 0,44 |
| r | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 \|\| | 47 | 0,47 |
| | Summe | 100 | 1 |

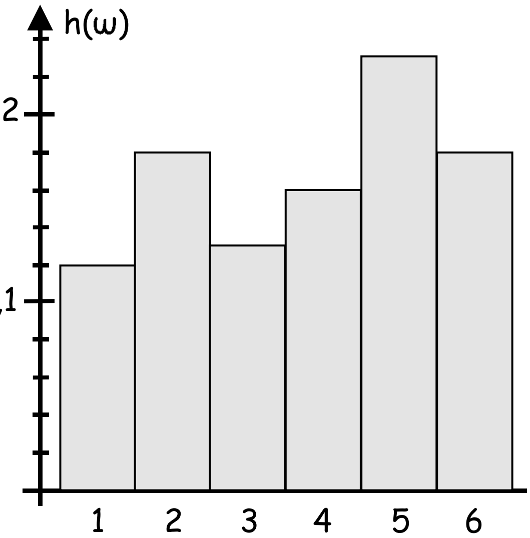
d)

| Ergebnis | b | g | r | Summe |
|---|---|---|---|---|
| absolute Häufigkeit | 72 | 312 | 366 | 750 |
| relative Häufigkeit | 0,096 | 0,416 | 0,488 | 1 |

e) ---

7.

| ω | h(ω) |
|---|---|
| 1 | 0,12 |
| 2 | 0,18 |
| 3 | 0,13 |
| 4 | 0,16 |
| 5 | 0,23 |
| 6 | 0,18 |




b) ---

8. a) $h(0) + h(1) + h(2) + h(3) + h(4)$

$$= \frac{214}{600} + \frac{85}{600} + \frac{126}{600} + \frac{58}{600} + \frac{117}{600}$$

$$= \frac{214+85+126+58+117}{600} = \frac{600}{600} = 1 .$$

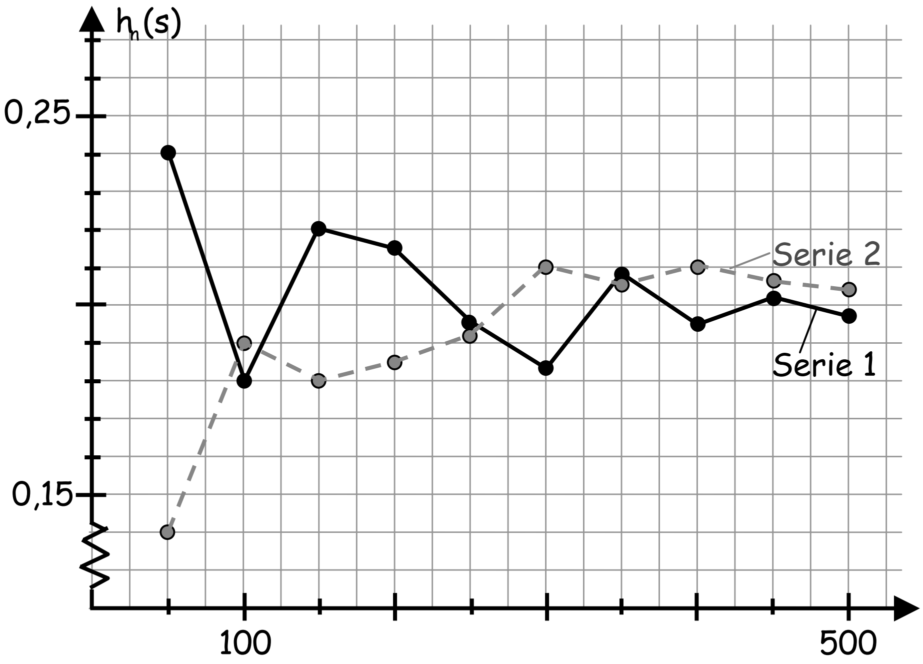
b) $h(0)+h(1)+h(2)+h(3)+h(4) = \frac{633}{1700}+\frac{202}{1700}+\frac{428}{1700}+\frac{147}{1700}+\frac{290}{1700}=1$ .

9. a)

| 1. Versuchsreihe | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 |
| $z_n(s)$ | 12 | 18 | 33 | 43 | 49 | 55 | 73 | 78 | 91 | 99 |
| $h_n(s)$ | 0,24 | 0,18 | 0,22 | 0,215 | 0,196 | 0,183 | 0,209 | 0,195 | 0,202 | 0,198 |

b)

| 2. Versuchsreihe | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 |
| $z_n(s)$ | 7 | 19 | 27 | 37 | 48 | 63 | 72 | 84 | 93 | 102 |
| $h_n(s)$ | 0,14 | 0,19 | 0,18 | 0,185 | 0,192 | 0,21 | 0,206 | 0,21 | 0,207 | 0,204 |




10. ---

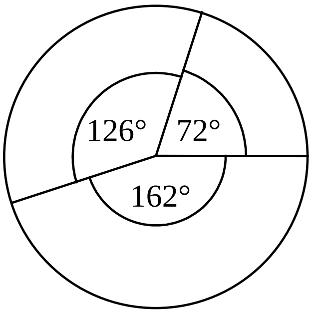
11.

| Zu a) | | | | Zu b) | | | | Zu c) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ergebnis | 1 | 2 | 3 | Ergebnis | 1 | 2 | 3 | ω | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Wahrscheinlichkeit | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | Wahrscheinlichkeit | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | P(ω) | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |

12.

| Zu a) | | | | Zu b) | | | | Zu c) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ω | a | b | c | ω | a | b | c | ω | a | b | c |
| P(ω) | $\frac{5}{12}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{4}{12}$ | P(ω) | $\frac{3}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | P(ω) | $\frac{4}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |

d)



13. a)

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

| $\omega$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

- $\Omega = \{6, \overline{6}\}$

| $\omega$ | 6 | $\overline{6}$ |
|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{6}$ |

- $\Omega = \{g, u\}$

| $\omega$ | $g$ | $u$ |
|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 0,5 | 0,5 |

b)

| Augenzahl | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| absolute Häufigkeit | 750 | 511 | 739 | 748 | 1492 | 760 |
| P(ω) | 0,150 | 0,102 | 0,148 | 0,150 | 0,298 | 0,152 |

14. a) $\Omega = \{r, s, w\}$

| $\omega$ | $r$ | $s$ | $w$ |
|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 0,30 | 0,20 | 0,50 |

b) $\Omega = \{r, s, w, g\}$

| $\omega$ | $r$ | $s$ | $w$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 0,310 | 0,210 | 0,479 | 0,001 |

15. a) $P(0) = 0,38$; $P(1) = 0,62$.

b) Man erwartet für das Ergebnis 1 die Häufigkeit $0,62 \cdot 900 = 558$. Die Abweichung der beobachteten Häufigkeit zum Erwartungswert ist 100, diese Abweichung ist sehr unwahrscheinlich.

16. a) $P(\alpha) = \frac{6}{11}$; $P(\beta) = \frac{3}{11}$; $P(\gamma) = \frac{2}{11}$.

b) Urne: 6 Kugeln mit der Beschriftung $\alpha$, 3 mit $\beta$, 2 mit $\gamma$.

17. a)

| | | | |
|---|---|---|---|
| w | w | z | w |
| w | z | z | z |

b) $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

| $\omega$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

c) ---

d) $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$.

| „Wappen oben“ | 0-mal | 1-mal | 2-mal | 3-mal |
|---|---|---|---|---|
| Möglichkeiten | zzz | wzz<br>zwz<br>zzw | wwz<br>wzw<br>zww | www |
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

18. a) $AMO, AOM, OAM, OMA, MAO, MOA$.

b) $\Omega = \{ AMO, \dots, MOA \}$,

$P(\omega) = \frac{1}{6}$ für alle $\omega \in \Omega$.

19. a) • $\Omega = \{ 7, 8, 9, 10, \text{B}, \text{D}, \text{K}, \text{A} \}$.

| $\omega$ | 7 | 8 | 9 | 10 | B | D | K | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

• $\Omega = \{ \text{Ass}, \text{Bild}, \text{Zahl} \}$.

| $\omega$ | Ass | Bild | Zahl |
|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{2}$ |

b)

| $\omega$ | Bild | $\overline{\text{Bild}}$ |
|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{8}$ |

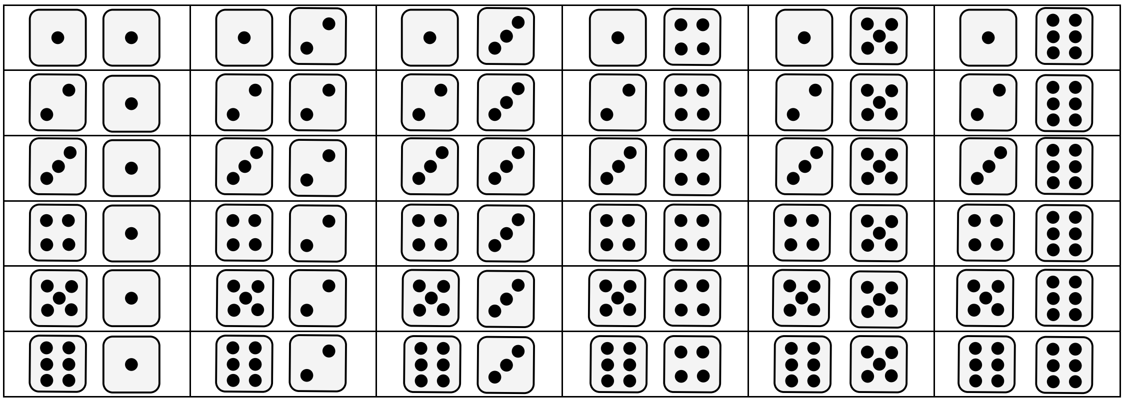
$\frac{3}{8} \cdot 120\text{-mal} = 45\text{-mal}$ kann Max mit einem Gewinn von 1 € rechnen.

$\frac{5}{8} \cdot 120\text{-mal} = 75\text{-mal}$ muss er mit einem Verlust von 80 c rechnen.

Verlust: $45 \cdot 1€ - 75 \cdot 0{,}8€ = -15€$.

c) Ein Spiel heißt fair, wenn der zu erwartende Gewinn in einer langen Serie 0 ist.
Ziehen einer Bildkarte: Man gewinnt 1 €.
Ziehen einer anderen Karte: Man verliert 60 c.

20. a)



b) • $\Omega = \{ \text{Pasch}, \overline{\text{Pasch}} \}$

| $\omega$ | Pasch | $\overline{\text{Pasch}}$ |
|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{6}$ |

• $\Omega = \{ 0, 1, 2 \}$

| $\omega$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{25}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

• $\Omega = \{ 2, 3, 4 \dots 11, 12 \}$

| $\omega$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{36}$ |

21. a) Die Eintrittswahrscheinlichkeit für Wappen oder Zahl ist gleich, nämlich jeweils 0,5.
    b) 1000 Lose, davon 200 Gewinne.

22. $n$ = Anzahl der Ameisen in der Kolonne.
    Versuchsergebnisse: 1 = markiert; 0 = nicht markiert.
    $P(1) = \frac{500}{n}$, $P(0) = \frac{n-500}{n}$. Relative Häufigkeit: $h(1) = \frac{28}{630} = \frac{2}{45}$.
    Wegen $P(1) \approx h(1)$ gilt: $\frac{500}{n} = \frac{2}{45} \quad \Rightarrow \quad n = 11250$.

# Ereignisse

23. a)
- $\Omega = \{ 001, 002, \dots, 300 \}$.
- $A = \{ 033, 066, 099, 133, 166, 199, 233, 266, 299 \}$.

b)
- Die Losnummer ist durch 12 teilbar.
- $B = \{ 012, 024, 036, \dots, 288, 300 \}$.

c)
- Z. B.: Die Losnummer hat die Endziffer 1 oder 5.
- Z. B.: $C = \{ 001, 005, 011, 015, \dots, 291, 295 \}$.

d) $P(A) = \frac{9}{300} = 3\%$; $P(B) = \frac{25}{300} = 8\frac{1}{3}\%$; $P(C) = \frac{60}{300} = 20\%$.

24. a) $\Omega = \{ \text{KA, KK, KD}, \dots, \text{C8, C7} \}$.

b)/c)
- A: Du ziehst ein As.

  A = {KA, PA, HA, CA}. P(A) = $\frac{1}{8}$.
- B: Du ziehst eine Herzkarte.

  B = {HA, HK, HD, HB, H10, H9, H8, H7}. P(B) = $\frac{1}{4}$.
- C: Du ziehst Pik Bube oder Herz Bube.

  C = {PB, HB}. P(C) = $\frac{1}{16}$.
- D: Du ziehst die Farbe Karo, aber kein Bild.

  D = {CA, C10, C9, C8, C7}. P(D) = $\frac{5}{32}$.
- E: Du ziehst Pik 7.

  E = {P7}. P(E) = $\frac{1}{32}$.

25. $A = \{ 10, 12, 14, 16, 18 \}$.

$B = \{ 18, 19 \}$.

$C = \{ 18, 19 \}$.

$D = \{ 12, 15, 18 \}$.

$E = \{ 11, 13, 15, 17 \}$.

$F = \Omega = \{ 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 \}$.

$G = \{ \; \}$.

$H = \{ 16 \}$.

26.
- [x] Die Augenzahl ist gerade.
- [ ] Die Augenzahl ist < 5.
- [x] Die Augenzahl ist nicht 1.
- [x] Die Augenzahl ist 3 oder 6.
- [ ] Die Augenzahl ist > 2 und nicht 6.
- [x] Die Augenzahl ist < 8.

27.

| Menge | Ereignis |
|---|---|
| { 1, 2, 5, 6 } | Die Augenzahl ist nicht 3 und nicht 4.<br>Oder: Die Augenzahl ist $< 3$ oder $> 4$. |
| { 1, 2, 3 } | Die Augenzahl ist kleiner oder gleich 3. |
| { 1, 2, 3, 4, 5 } | Die Augenzahl ist nicht 6. |
| { 1, 3, 5 } | Die Augenzahl ist ungerade. |
| { 2, 4 } | Die Augenzahl ist 2 oder 4. |

Anzahl der Teilmengen: 64; so viele verschiedene Ereignisse gibt es auch.

28. a)/b) $\{\ \}$, $\{r\}$, $\underline{\{s\}}$, $\{w\}$, $\underline{\{r, s\}}$, $\{r, w\}$, $\underline{\{s, w\}}$, $\underline{\{r, s, w\}}$ .

c) $P(\{\ \}) = 0$ . $\quad$ $P(\{r, s\}) = 0,75$ .

$P(\{r\}) = 0,5$ . $\quad$ $P(\{r, w\}) = 0,75$ .

$P(\{s\}) = 0,25$ . $\quad$ $P(\{s, w\}) = 0,5$ .

$P(\{w\}) = 0,25$ . $\quad$ $P(\{r, s, w\}) = 1$ .

# Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

29. a)

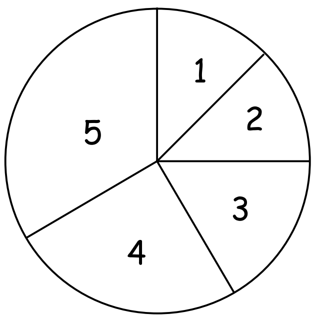
| $\omega$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ |

b)
- $\frac{1}{4}$
- $P(A)=\frac{1}{4}$ .
- $P(A)=P(4)+P(5)+P(6)$.

c) $P(B)=P(3)+P(4)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$ .

d) ---

30. a)




| $\omega$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ |

b)
- $P(A)=P(2)+P(4)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$.
- $P(B)=P(3)+P(4)+P(5)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$.

c)
- $P(C)=P(1)+P(5)=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{11}{24}<\frac{1}{2}$. Nein.

31. a) $P(A)=P(r)+P(b)=\frac{7}{16}$,
$P(B)=P(b)+P(g)+P(s)+P(w)=\frac{5}{8}$,
$P(C)=P(r)+P(s)+P(w)=\frac{11}{16}$.

| $\omega$ | $b$ | $g$ | $r$ | $s$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{2}{16}$ |

b) $P(A)=\frac{2}{5}<\frac{7}{16}$,
$P(B)=\frac{2}{3}>\frac{5}{8}$,
$P(C)=\frac{2}{3}<\frac{11}{16}$.

| $\omega$ | $b$ | $g$ | $r$ | $s$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{5}{15}$ | $\frac{3}{15}$ | $\frac{2}{15}$ |

32. a) $0,30+0,10+0,25+0,12+0,13+0,10=1$ .

b) 0,65

c) $P$(„Jan gewinnt.“) = 0,55. Jan gewinnt bei 100 Spielen etwa 55 und verliert etwa 45. Gewinn: Etwa 10 €.

d) Jan gewinnt bei den Augenzahlen 1, 2 oder 6.

33\. a) $P(E) = \frac{3}{13} \approx 0,23$.  b) $\frac{3}{13} \cdot 520 = 120$.

c)

| P(E) | Das Ereignis E tritt ein |
|---|---|
| 0,0001 | selten, |
| 0,04 | manchmal, |
| 0,23 | sehr oft, |
| 0,79 | fast immer, |
| 0,92 | fast nie, |
| 0,998 | häufig. |

d) „Kein Bild“ tritt häufig („As“ selten) ein.

e) Z. B.: Urne mit 1000 Kugeln, darunter 1 rote und 999 weiße Kugeln.
*E*: Die gezogene Kugel ist weiß.

34\. Z. B.:

| $\omega$ | $r$ | $s$ | $w$ |
|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 0,35 | 0,38 | 0,27 |

35\. a) Sarahs Wunsch: $A = \{ 2, 4, 5, 6 \}$.

Tims Wunsch: $\bar{A} = \{ 1, 3 \}$.

Wahrscheinlichkeiten: $P(A) = \frac{2}{3}$ ; $P(B) = \frac{1}{3}$ .

Zusammenhang: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

b) Tims Wunsch: $B = \{ 2, 3, 5 \}$.

Sarahs Wunsch: $\bar{B} = \{ 1, 4, 6 \}$.

Wahrscheinlichkeiten: $P(B) = P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$ .

36.

| Ereignis | Gegenereignis |
|---|---|
| Mindestens drei Schüler haben einen Preis gewonnen. | Weniger als 3 Schüler haben einen Preis gewonnen. |
| Höchstens acht Schüler haben einen Preis gewonnen. | Mehr als acht Schüler haben einen Preis gewonnen. |
| Weniger als sechs Schüler haben einen Preis gewonnen. | Mindestens sechs Schüler haben einen Preis gewonnen. |
| Lea hat keinen Preis gewonnen. | Lea hat einen Preis gewonnen. |
| Lea oder Max haben einen Preis gewonnen. (Mindestens einer der beiden hat einen Preis gewonnen.) | Keiner der beiden hat einen Preis gewonnen. Weder Lea noch Max haben einen Preis gewonnen. |
| Lea und Max haben einen Preis gewonnen. | Nicht beide haben einen Preis gewonnen. Höchstens einer der beiden hat einen Preis gewonnen. |

37. $A$: Mindestens einmal fällt die Sechs.

$\overline{A}$: Die Sechs fällt gar nicht.

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,4019 = 0,5981$.

# Laplace-Experimente

38. a) $\Omega_1 = \{ b, g, r, s \}$. $\Omega_2 = \{ b, g, r, s \}$.

| $\omega$ | $b$ | $g$ | $r$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 0,40 | 0,25 | 0,20 | 0,15 |

| $\omega$ | $b$ | $g$ | $r$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 0,25 | 0,25 | 0,22 | 0,25 |

b)
- Werfen einer Münze und Feststellen, ob Wappen oder Zahl oben liegt.
- Werfen eines nicht gezinkten Würfels und Feststellen der Augenzahl.
- Drehen eines Glücksrades mit gleich großen Sektoren und feststellen der Sektorennummer.
- Ziehen einer Karte und Feststellen der Farbe.

usw.

39. • Nein. • Nein. • Ja. • Ja. • Nein.

40. a) Ergebnismenge: $\Omega = \{ 1, 2, 3, \ldots, 12 \}$.

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Alle Ergebnisse haben die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{12}$.

b) $P(A) = P(1) + P(2) + P(5) + P(8) + P(10) = \frac{5}{12}$.

c) $A = \{ 1, 2, 5, 8, 10 \}$.

$|A| = 5$, $|\Omega| = 12$.

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

41. a) $\Omega = \{ 1, 2, \ldots, 12 \}$; $P(\omega) = \frac{1}{12}$ für alle $\omega \in \Omega$.

b) $P(A) = \frac{5}{12}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{1}{4}$.

c) ---

d) $P(\text{"Augenzahl ist kleiner als 8"}) = \frac{7}{12}$ ; $\frac{7}{12} \cdot 180 = 105$. Das Ereignis tritt ungefähr 105-mal ein.

42. a) $\frac{1}{365}$ b) $\frac{12}{365}$ c) $\frac{30}{365}$ d) $\frac{61}{365}$

43. a) $\frac{6}{49}$ b) $\frac{1}{8}$

44. a) Es gibt 7 Zahlen, die auf 5 enden: 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65. Aber es gibt 11 Zahlen, die mit 5 beginnen: 5, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56 , 57, 58, 59. Damit folgt:
$P(\text{"7a"}) = \frac{7}{66} < \frac{11}{66} = P(\text{"7b"})$. Bei der Klasse 7b hat man die höhere Gewinnchance.

b) Z. B.: Alle Zahlen, die auf 5 oder 6 enden, gewinnen. $P(\text{"7a"}) = \frac{14}{66} \approx 0{,}212$.

45. a) $\frac{62}{250} = 0{,}248$ . b) $\frac{27}{250} = 0{,}108$ . c) $\frac{6}{250} = 0{,}024$ . d) $\frac{83}{250} = 0{,}332$ .

46. 0,9371

47. a) ---

b)

| Setzmöglichkeit | Beschreibung | Wahrscheinlichkeit | Gewinn |
|---|---|---|---|
| Plein | Eine Zahl (z. B. 25). | $\frac{1}{37}$ | Einsatz × 35 |
| Cheval | 2 benachbarte Zahlen (z. B. 17, 20). | $\frac{2}{37}$ | Einsatz × 17 |
| Transversale pleine | Querreihe von 3 Zahlen (z. B. 28, 29, 30). | $\frac{3}{37}$ | Einsatz × 11 |
| Carré | Viererblock (z. B. 5, 6, 8, 9). | $\frac{4}{37}$ | Einsatz × 8 |
| Transversale simple | 2 benachbarte Querreihen (z. B. 22, 23, 24 und 25, 26, 27). | $\frac{6}{37}$ | Einsatz × 5 |
| Colonne | Längsreihe von 12 Zahlen (z. B. 2 – 35). | $\frac{12}{37}$ | Einsatz × 2 |
| Premier ($12^P$) | Das erste Dutzend (1 – 12). | $\frac{12}{37}$ | Einsatz × 2 |
| Milieu ($12^M$) | Das mittlere Dutzend (13 – 24). | $\frac{12}{37}$ | Einsatz × 2 |
| Dernier ($12^D$) | Das letzte Dutzend (25 – 36). | $\frac{12}{37}$ | Einsatz × 2 |
| Manque | Die erste Hälfte (1 – 18). | $\frac{18}{37}$ | Einsatz × 1 |
| Passe | Die zweite Hälfte (19 – 36). | $\frac{18}{37}$ | Einsatz × 1 |
| Pair | Alle geraden Zahlen. | $\frac{18}{37}$ | Einsatz × 1 |
| Impair | Alle ungeraden Zahlen. | $\frac{18}{37}$ | Einsatz × 1 |
| Rouge | Alle roten Zahlen. | $\frac{18}{37}$ | Einsatz × 1 |
| Noir | Alle schwarzen Zahlen. | $\frac{18}{37}$ | Einsatz × 1 |

c) 16 €

# Vermischte Aufgaben

48. a)

| $\omega$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 0,11 | 0,06 | 0,33 | 0,33 | 0,06 | 0,11 |

b) $\frac{A(1)}{P(1)} = \frac{3,38\,\text{cm}^2}{0,11} = 30,7\,\text{cm}^2$; $\frac{A(2)}{P(2)} = \frac{2,6\,\text{cm}^2}{0,06} = 43,3\,\text{cm}^2$.

$P$ ist nicht proportional zu $A$.

49. a) $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

| $\omega$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{18}$ |

b) $P("<2") = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$. Ja.

50. 0 = Scheibe verfehlt;
$d$ = Pfeil trifft die dunkle Fläche;
$w$ = Pfeil trifft die weiße Fläche.

| $\omega$ | 0 | $d$ | $w$ |
|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 0,1 | 0,707 | 0,193 |

51. a) Nicht alle Augenzahlen sind gleichwahrscheinlich.
b) Ungefähr 430-mal.
c) Peter gewinnt bei den Augenzahlen 2, 3 und 4.

52. a) $P_{\text{alt}}(w) = \frac{2}{5} > \frac{1}{3} = P_{\text{neu}}(w)$.
b) $P_{\text{alt}}(w) = \frac{2}{5} < \frac{3}{7} = P_{\text{neu}}(w)$.
c) $\frac{1}{2}$

53. a) $P(A) = \frac{10}{41}$; $P(B) = \frac{21}{41}$.
b) $\overline{C}$ = Die Kugelnummer hat höchstens vier Teiler.
$\overline{C} = \{10; 11; 13; 14; 15; 17; 19; 21; 22; 23; 25; 26; 27; 29; 31; 33; 34; 35; 37; 38; 39; 41; 43; 46; 47; 49\}$
$P(\overline{C}) = \frac{26}{41}$; $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = \frac{15}{41}$.
c) $P = \{11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47\}$; $P(\overline{P}) = 1 - \frac{11}{41} = \frac{30}{41}$.

54. a) 0,23
b) Z. B. Gewinn bei den Endziffern 3, 5 oder 7.

55. a) Dreistufiger Ergebnisbaum mit jeweils drei Verzweigungen ($w$, $g$, $s$).
Anzahl der möglichen Ergebnisse: 27.

b) $P(A) = \frac{2}{9}$.

c) $\frac{19}{27}$

56. a) $32 \cdot 31 = 992$. b) $\frac{12}{992} \approx 0{,}012$. c) $\frac{12 \cdot 11}{992} \approx 0{,}133$. d) Ungefähr 324 €.

57. a) 0,579. b) $\frac{75}{216} \approx 0{,}347$.

58. a) Die Kugel wird zuerst nach rechts, dann nach links und dann wieder zweimal nach rechts abgelenkt und landet schließlich in der Kammer mit der Nummer 3.

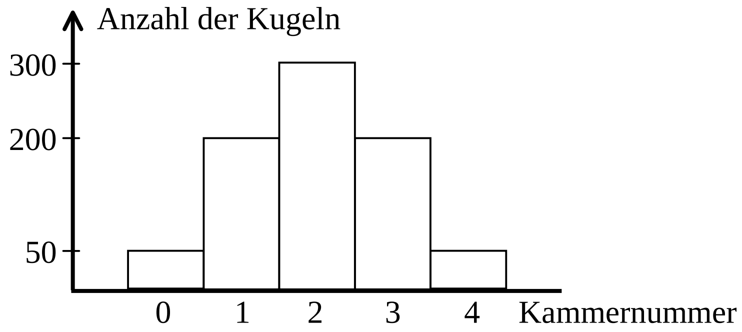
b) $\Omega$ = Menge aller 4-Tupel aus $\{\ell; r\}$;

$P(\omega) = \frac{1}{16}$ für alle $\omega \in \Omega$.

c)

| Kammernummer | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Wahrscheinlichkeit | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ |

d)




59. a) Beide haben die gleiche Gewinnchance.

b) Anzahl der möglichen Ziehungsergebnisse: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

c) $E$: Martina hat drei Richtige.

$E = \{(2|5|7); (2|7|5); (5|2|7); (5|7|2); (7|2|5); (7|5|2)\}$;

$P(E) = \frac{6}{336} = \frac{1}{56} \approx 0{,}0179$.

d) Ziehungsergebnisse, bei denen Martina 2 Richtige hat: Z. B. $(2|3|5)$ oder $(8|2|7)$.
Es gibt 90 solcher Ziehungsergebnisse. Wahrscheinlichkeit: $\frac{90}{336} = \frac{15}{56} \approx 0{,}2679$.

e) Einnahmen: 300 €.

Ausschüttung: ungefähr 11-mal 3 Richtige: ungefähr 55 €
ungefähr 161-mal 2 Richtige: ungefähr 161 €
ungefähr 216 €

Gewinn: 84 €.

60. a) $\Omega = \{\, 000\,000 ; \ldots ; 999\,999 \,\}$ ;

$P(\omega) = \frac{1}{10^6}$ für alle $\omega \in \Omega$ .

b) $\frac{1}{10^6}$ .

c) $A = \{\, 083\,050 ; 183\,050 ; \ldots ; 983\,050 \,\}$ ; $P(A) = \frac{9}{10^6}$.

d) $\frac{9}{10^5}$ $\left( \frac{9}{10^4}, \frac{9}{10^3}, \frac{9}{10^2} \right)$.

e) $\frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \frac{1}{10^6} = \frac{90000 + 9000 + 900 + 90 + 9 + 1}{10^6} = \frac{1}{10}$ .

# Mehrstufige Zufallsexperimente und bedingte Wahrscheinlichkeit

2

## UND-Ereignisse und ODER-Ereignisse

1. a) $\Omega = \{1; 2; \ldots; 10\}$

$$P(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{15}, \text{wenn } \omega \in \{1; \ldots; 5\} \\ \frac{1}{15}, \text{wenn } \omega \in \{6; \ldots; 10\} \end{cases}$$

b) $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ ; $P(A) = \frac{8}{15}$.

$B = \{3; 6; 9\}$ ; $P(B) = \frac{4}{15}$.

$\overline{B} = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10\}$ ; $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{11}{15}$.

c) Ja.

d) $A \cap B = \{3; 9\}$ ; $P(A \cap B) = \frac{3}{15}$.

$A \cap \overline{B} = \{1; 5; 7\}$ ; $P(A \cap \overline{B}) = \frac{5}{15}$.

e) $A \cup B = \{1; 3; 5; 6; 7; 9\}$,

$P(A \cup B) = \frac{9}{15}$.

f) $P(A) + P(B) = \frac{8}{15} + \frac{4}{15} = \frac{12}{15} \neq \frac{9}{15} = P(A \cup B)$.

Richtig: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. a)

$P(A)$ = Summe aller $P(\omega)$ mit $\omega \in A$

$P(B)$ = Summe aller $P(\omega)$ mit $\omega \in B$

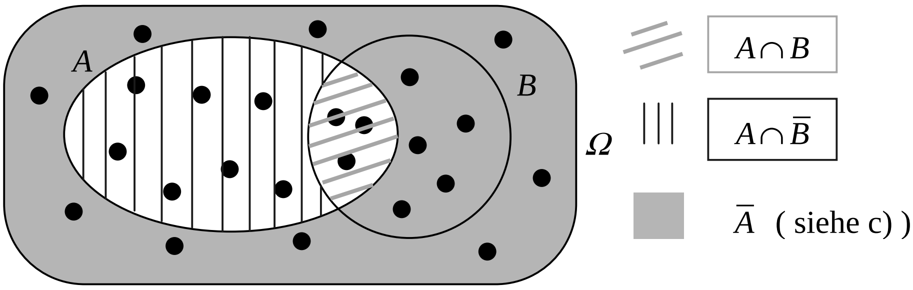
$P(A \cup B)$ = Summe aller $P(\omega)$ mit $\omega \in A$

+ Summe aller $P(\omega)$ mit $\omega \in B$

− Summe aller $P(\omega)$ mit $\omega \in A \cap B$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

b)

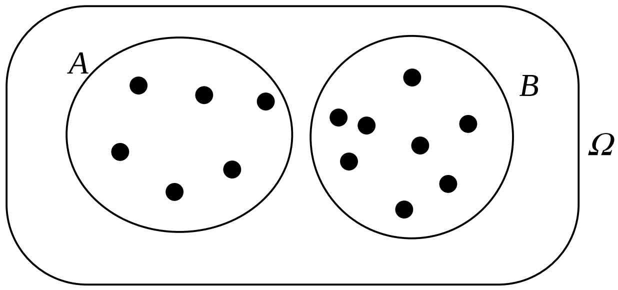



$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

c) $A\,(\text{weiß}) \cup \overline{A}\,(grau) = \Omega$

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ist richtig, wenn $A \cap B = \{\ \}$ ist.




e)

Gegenereignisregel: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ .

Additionsregel: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

Falls $A \cap B = \{\ \}$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Zerlegungsregel: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ .

3. a) $P(\overline{A}) = 0,46$ .

   b) $P(A \cup B) = 0,54 + 0,36 - 0,24 = 0,66$ .

   c) $P(A \cap \overline{B}) = 0,54 - 0,24 = 0,30$ .

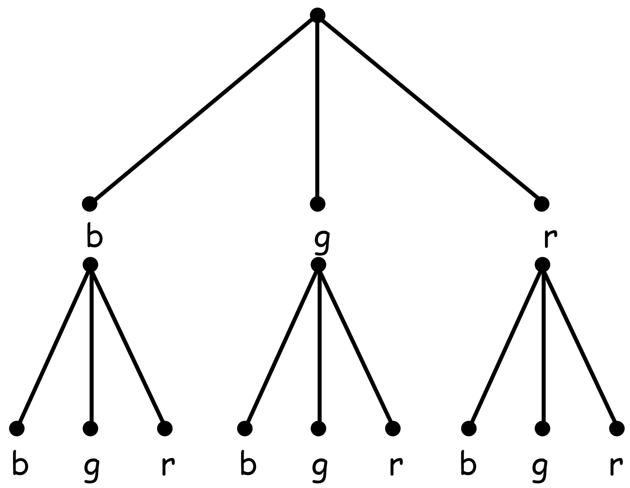
   d) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,66 = 0,34$ .

   e) $P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0,24 = 0,76$ .

   f) $$\begin{aligned} P\big((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\big) &= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) - P\underbrace{\big((A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap B)\big)}_{=\{\,\}} . \\ &= P(A \cap \overline{B}) + \big(P(B) - P(A \cap B)\big) \\ &= 0,30 + (0,36 - 0,24) \\ &= 0,42 \ . \end{aligned}$$

# Mehrstufige Zufallsexperimente

4. a)




b) $\Omega = \{ (b|b); (b|g); (b|r); \ldots; (r|r) \}$.

c) $P(\omega) = \frac{1}{9}$ für alle $\omega \in \Omega$.

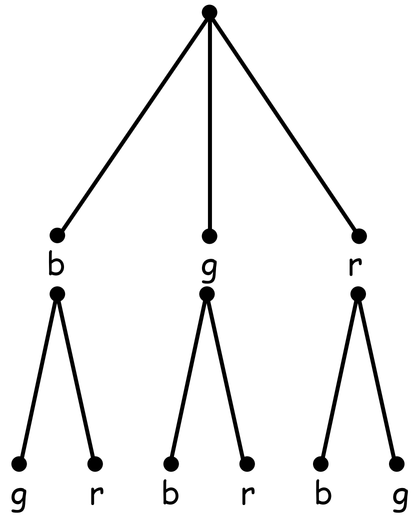
d)

Ergebnismenge:

$\Omega = \{(b|g); (b|r); (g|b); (g|r); (r|b); (r|g)\}$.

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

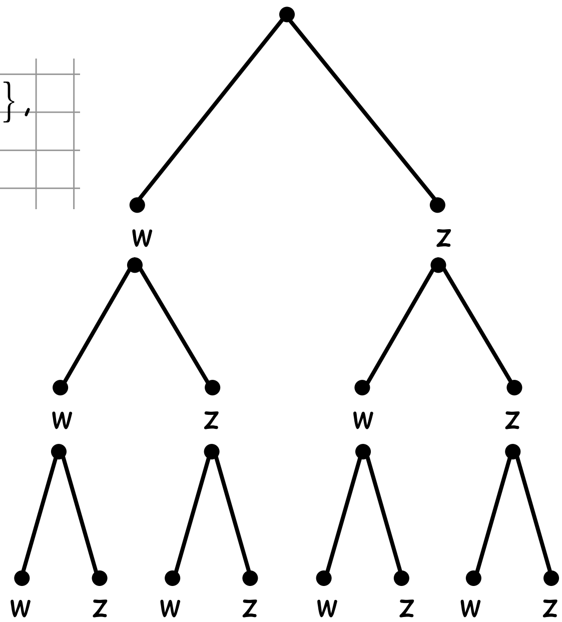
$P(\omega) = \frac{1}{6}$ für alle $\omega \in \Omega$.




5. a) Siehe rechts.

b) $\Omega = \{(w|w|w); (w|w|z); \ldots; (z|z|z)\}$,

$P(\omega) = \frac{1}{8}$ für alle $\omega \in \Omega$.




6. a) $(w|z|z|w|w|w|z|w|z|z)$

b) Es ergibt sich ein 10-stufiger Ergebnisbaum mit jeweils der Verzweigungszahl 2; Anzahl der möglichen Ergebnisse: $2^{10} = 1024$.

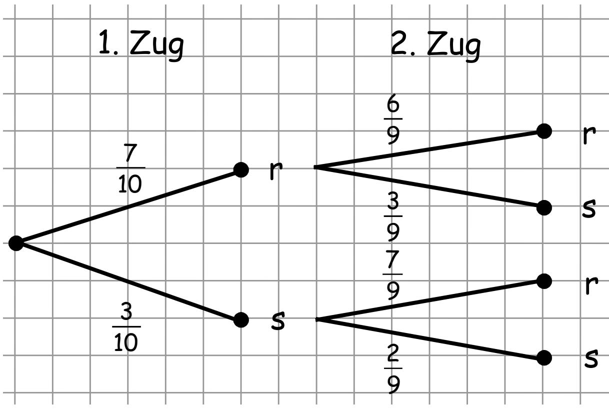
c) $\Omega$ = Menge aller 10-Tupel aus $\{w; z\}$,

$P(\omega) = \frac{1}{1024}$ für alle $\omega \in \Omega$.

d) Etwa einmal.

7. a) Da mehr rote als schwarze Kugeln in der Urne sind, wird wohl nicht jedes Ergebnis mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

b)




Ergebnismenge:

$\Omega = \{(r|r);(r|s);(s|r);(s|s)\}$.

c) In $\frac{7}{10}$ von 300 Experimenten wird die erste Kugel rot sein (das sind 210), und in $\frac{6}{9}$ von diesen 210 Experimenten wird auch die zweite Kugel rot sein. Insgesamt ergibt sich:

$\frac{6}{9}$ von ($\frac{7}{10}$ von 300) $= \frac{6}{9}\cdot(\frac{7}{10}\cdot 300) = (\frac{6}{9}\cdot\frac{7}{10})\cdot 300 = \frac{7}{15}\cdot 300 = 140$.

d)
- (r|s): $\frac{3}{9}$ von ($\frac{7}{10}$ von 300) = ... = $\frac{7}{30}\cdot 300 = 70$
- (s|r): $\frac{7}{9}$ von ($\frac{3}{10}$ von 300) = ... = $\frac{7}{30}\cdot 300 = 70$
- (s|s): $\frac{2}{9}$ von ($\frac{3}{10}$ von 300) = ... = $\frac{1}{15}\cdot 300 = 20$

e)

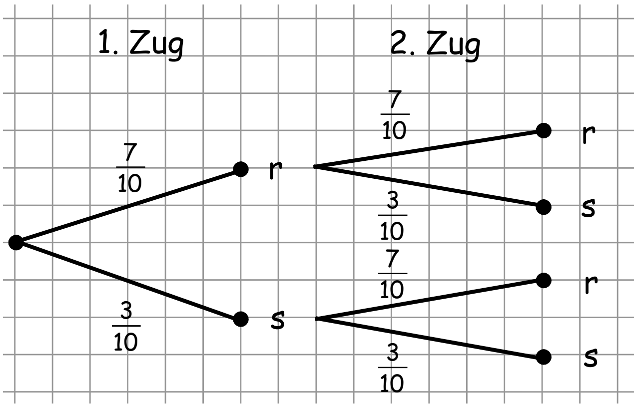
| ω | (r\|r) | (r\|s) | (s\|r) | (s\|s) |
|---|---|---|---|---|
| P(ω) | $\frac{14}{30}$ | $\frac{7}{30}$ | $\frac{7}{30}$ | $\frac{2}{30}$ |

f)

**Multiplikationsregel für Wege**

- Bei einem mehrstufigen ZE entspricht jedem Ergebnis ein Weg durch den Ergebnisbaum.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Weges.

8. a)/b)




Ergebnismenge:

$\Omega = \{(r|r);(r|s);(s|r);(s|s)\}$.

c)

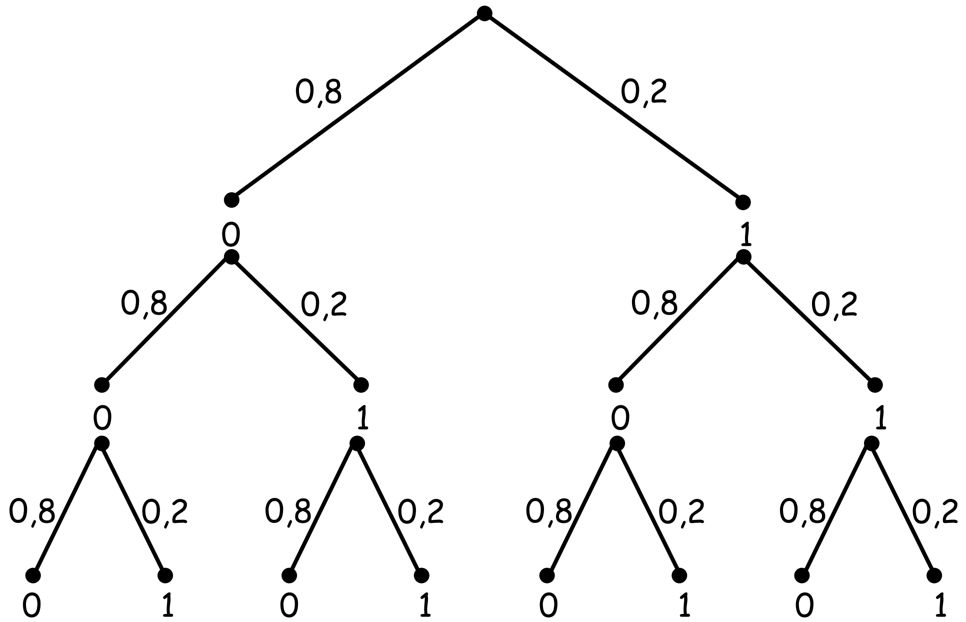
| ω | (r\|r) | (r\|s) | (s\|r) | (s\|s) |
|---|---|---|---|---|
| P(ω) | 0,49 | 0,21 | 0,21 | 0,09 |

d) Ich würde mich für die Variante mit Zurücklegen entscheiden, denn

$P_{\text{mit}}\left((r\,|\,r)\right) = 0,49 > \frac{14}{30} = P_{\text{ohne}}\left((r\,|\,r)\right)$.

9. Aufgabe 9: $P(\omega) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ ; Aufgabe 10: $P(\omega) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ .

10.




| ω | P(ω) |
|---|---|
| (0\|0\|0) | 0,512 |
| (0\|0\|1) | 0,128 |
| (0\|1\|0) | 0,128 |
| (1\|0\|0) | 0,128 |

| ω | P(ω) |
|---|---|
| (1\|1\|0) | 0,032 |
| (1\|0\|1) | 0,032 |
| (0\|1\|1) | 0,032 |
| (1\|1\|1) | 0,008 |

11. a) 6-stufiger Ergebnisbaum, Verzweigungszahl jeweils 2, $P(0) = 0{,}8$; $P(1) = 0{,}2$.

b) $\Omega$ = Menge aller 6-Tupel aus $\{0;1\}$

$|\Omega| = 2^6 = 64$

c)
- $P((0|0|1|0|0|0)) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}8^5 \cdot 0{,}2 = 0{,}065536$
- $P((0|0|0|0|0|1)) = 0{,}8^5 \cdot 0{,}2 = 0{,}065536$

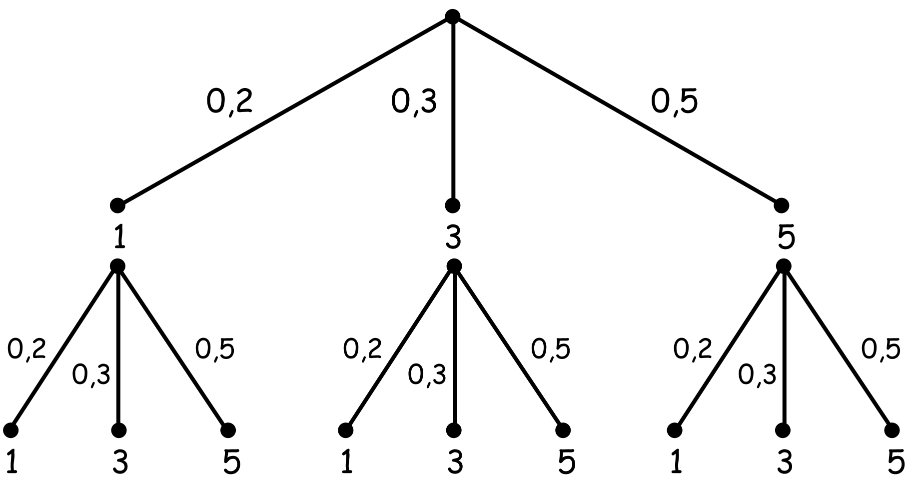
Sei $\omega \in \Omega$ ein Ergebnis mit einem Treffer.

- $P(\omega) = \quad = 0{,}8^5 \cdot 0{,}2 = 0{,}065536$.

d)

| Ergebnis mit | Wahrscheinlichkeit |
|---|---|
| 0 Treffern | $0{,}8^6 = 0{,}262144$ |
| 1 Treffer | $0{,}8^5 \cdot 0{,}2 = 0{,}065536$ |
| 2 Treffern | $0{,}8^4 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}016384$ |
| 3 Treffern | $0{,}8^3 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}004096$ |
| 4 Treffern | $0{,}8^2 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}001024$ |
| 5 Treffern | $0{,}8 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}000256$ |
| 6 Treffern | $0{,}2^6 = 0{,}000064$ |

12. a)




| $\omega$ | (1\|1) | (1\|3) | (1\|5) | (3\|1) | (3\|3) | (3\|5) | (5\|1) | (5\|3) | (5\|5) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 0,04 | 0,06 | 0,10 | 0,06 | 0,09 | 0,15 | 0,10 | 0,15 | 0,25 |

b) $A = \{(1|5);(3|3);(5|1)\}$

$P(A) = P((1|5)) + P((3|3)) + P((5|1)) = 0{,}29$

c) $P(B)=0,64;\ P(C)=0,38;\ P(D)=0,96.$

d) **Additionsregel für Wege**

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller zum Ereignis gehörenden Wege.

13. a)

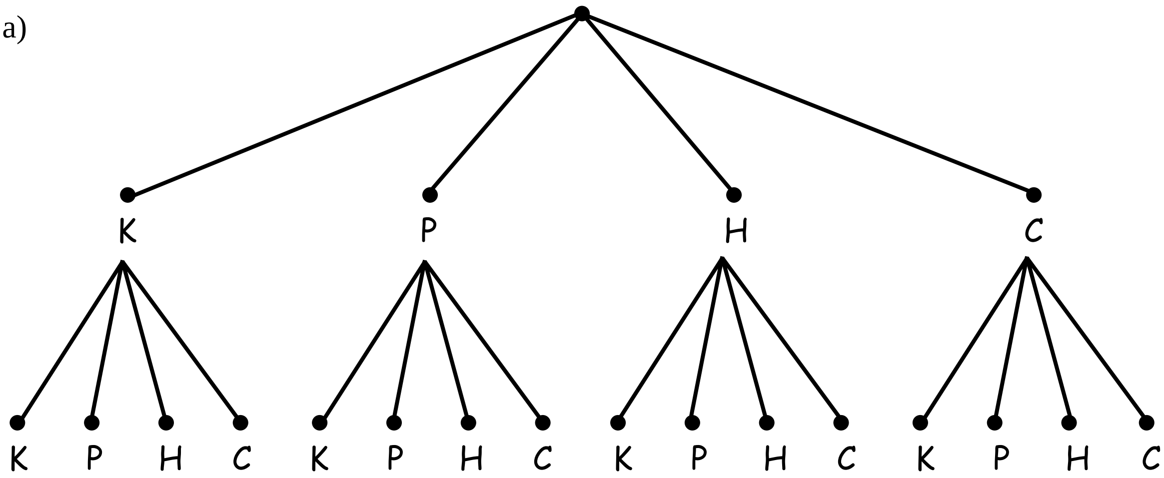
| Gewinn | 0 € | 1 € | 3 € | 5 € |
|---|---|---|---|---|
| Wahrscheinlichkeit | $\frac{17}{48}$ | $\frac{17}{48}$ | $\frac{8}{48}$ | $\frac{6}{48}$ |

b) Ja, zu erwartender Gewinn: 230 €.

c) Ab 1,50 € (genau 1,48 €) lohnt es sich nicht mehr zu spielen.

# Dreizehn Baum-Aufgaben

14. a)




b)

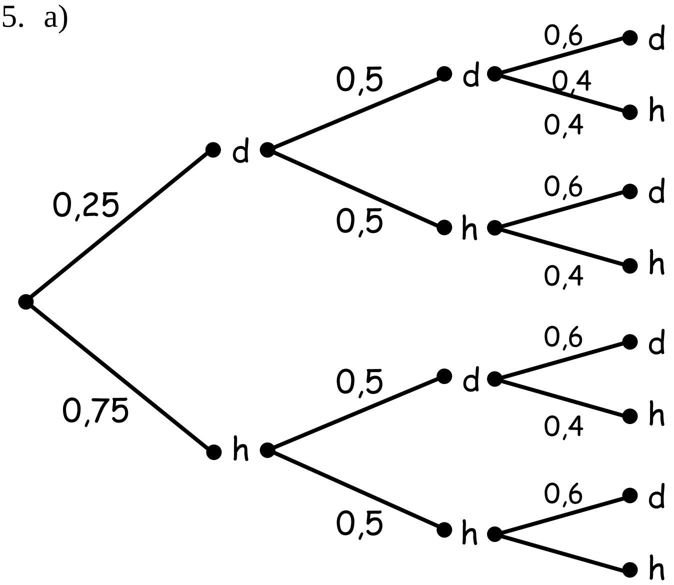
$P((K|K)) = P((P|P)) = P((C|C)) = P((H|H)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{31} = \frac{7}{124}$.

In allen anderen Fällen: $P(\omega) = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{31} = \frac{8}{124}$.

c) $P(A) = 0,25$; $P(B) = 0,1935$; $P(C) = 0,1935$; $P(D) = 0,3871$; $P(E) = 0,4435$.

d) $\frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{6}{30} \approx 0,0113$.

15. a)

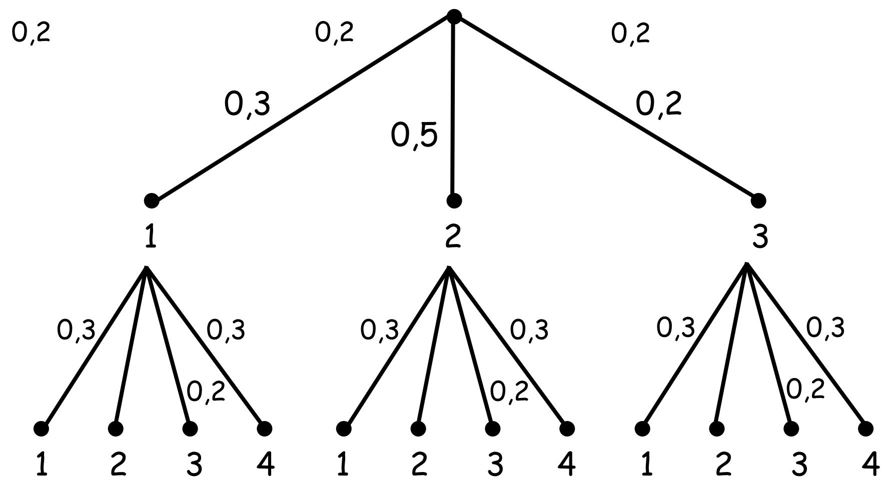



| ω | P(ω) |
|---|---|
| (d\|d\|d) | 0,075 |
| (d\|d\|h) | 0,05 |
| (d\|h\|d) | 0,075 |
| (d\|h\|h) | 0,05 |
| (h\|d\|d) | 0,225 |
| (h\|d\|h) | 0,15 |
| (h\|h\|d) | 0,225 |
| (h\|h\|h) | 0,15 |

b) $P(A) = 0,305;\ P(B) = 0,425;\ P(C) = 0,925.$

c) $\overline{B}$: Weniger als zwei Zeiger bleiben im dunklen Sektor stehen; $P(\overline{B}) = 0,575.$

16. a)

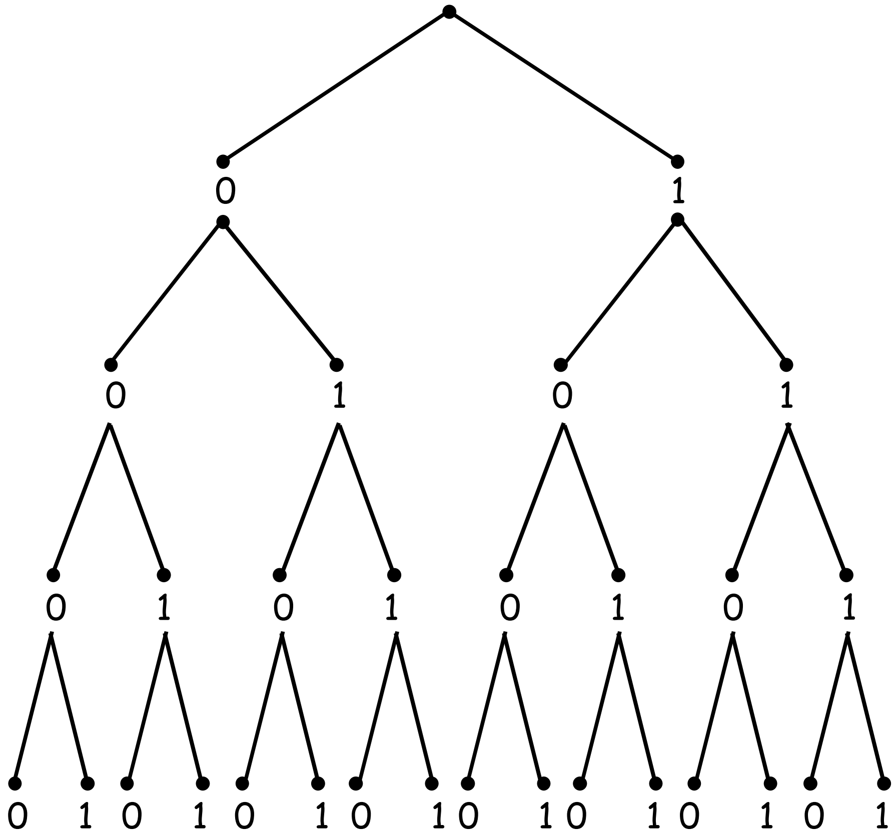



b) $P$(„Gewinn“) = 0,23.

c) 1000 € – 690 € = 310 €.

d) Jetzt ist $P$(„Gewinn“) = 0,25. Für einen Spieler ist Thomas Gewinnregel günstiger, die Klasse steht schlechter da.

17. a)




b)

- Zweige, die bei 0 enden: 0,6 ;
- Zweige, die bei 1 enden: 0,4 .

c)

$P(T = 2) = 6 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^2 = 0,3456$

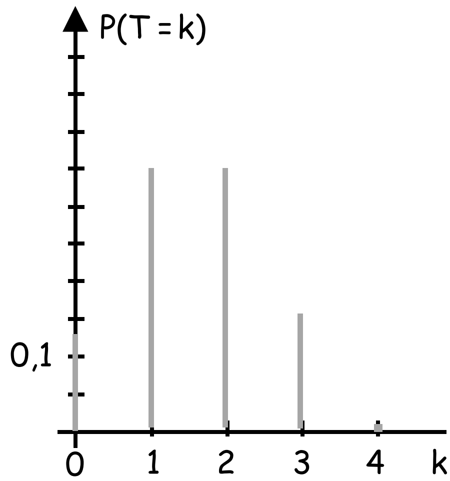
d)

$P(T = 0) = 0,6^4 = 0,1296$

$P(T = 1) = 4 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^3 = 0,3456$

$P(T = 3) = 4 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^1 = 0,1536$

$P(T = 4) = 0,4^4 = 0,0256$




e)

$P(T \leq 1) = P(T = 0) + P(T = 1) = 0,4752$

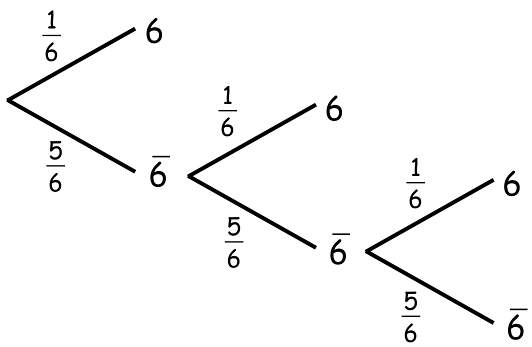
$P(T \leq 2) = \ldots = 0,8208$

$P(T \leq 3) = \ldots = 0,9744$

$P(T \leq 4) = \ldots = 1$

18. a) Würfel B.
    b) $P(A) = \frac{5}{12} < \frac{7}{12} = P(B)$ .
    c) 1 durch 6 ersetzen.
    d) Ja: 1 durch 3 ersetzen.

19. a)




| ω | P(ω) |
|---|---|
| 6 | $\frac{1}{6}$ |
| $(\bar{6}\,\vert\,6)$ | $\frac{5}{36}$ |
| $(\bar{6}\,\vert\,\bar{6}\,\vert\,6)$ | $\frac{25}{216}$ |
| $(\bar{6}\,\vert\,\bar{6}\,\vert\,\bar{6})$ | $\frac{125}{216}$ |

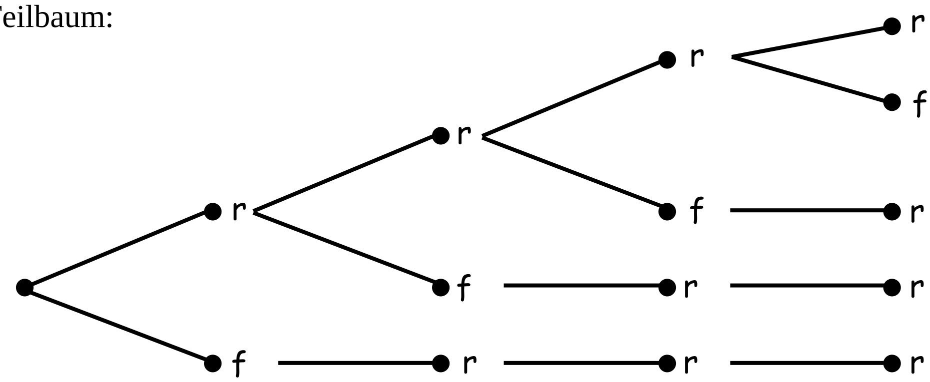
    b) Nein, denn *P*(„Sechs wird gewürfelt“) $= \frac{91}{216} < \frac{1}{2}$.
    c) Ab 13 Würfen ist die Wahrscheinlichkeit, dass noch keine Sechs gefallen ist, kleiner als 10 %.

20. a) Anzahl der Stufen: 20; Anzahl der Wege: $2^{20}$; Wahrscheinlichkeiten: $\frac{1}{365}$ oder $\frac{364}{365}$.
    b) $P\big((0|0|0|...|0)\big) = \left(\frac{364}{365}\right)^{20} \approx 0{,}9466$
    P(„wenigstens ein Gast ist am 6. Juli geboren“) $\approx$ 0,0534
    c) $\left(\frac{364}{365}\right)^n = 0{,}5$; Lösen durch Probieren: $n = 253$.

21. a) Anzahl der Stufen: 4; Verzweigungen: 26; Wege: $456\,976$; Wahrscheinlichkeiten: $\frac{1}{26}$.
    b) $2{,}188 \cdot 10^{-6}$.
    c) Einmal.

22. a) Anzahl der Stufen: 4; Verzweigungen je Stufe: 2; Wege: 16; Wahrscheinlichkeiten: $\frac{2}{3}$ oder $\frac{1}{3}$.
    b) • $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx 0{,}0123$ ;
    • $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0{,}1975$ .

c) Teilbaum:

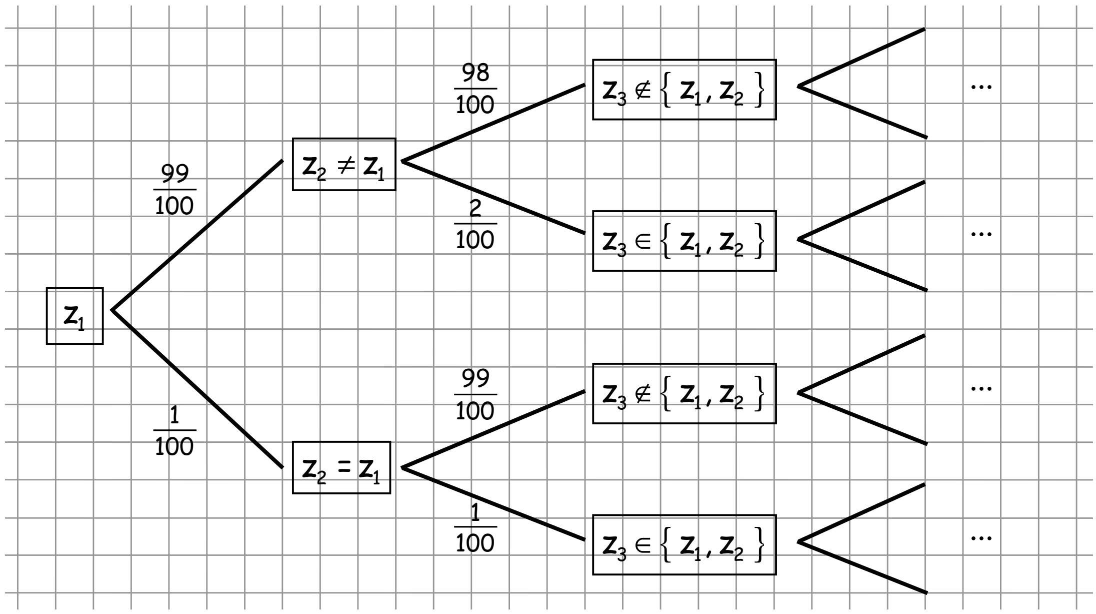



$P(\text{„wenigstens drei Fragen richtig beantwortet"}) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \approx 0{,}1111$ .

d) $P(\text{„Willi besteht"}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} + 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot \frac{2}{3} = \frac{21}{3^{10}} \approx 0{,}0004$ .

*Zusatz:* $P(\text{„Willi besteht"}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{2^{10}} \approx 0{,}0107$ .

23. a)




Julia vergleicht die Zahl $z_k$, die die $k$-te Person gewählt hat, mit den Zahlen, die die vorigen gewählt hatten, und entscheidet, ob sie gleich oder ungleich ist.
9 Stufen, 512 Wege.

b) Für das Ereignis $E$ gibt es 511Wege im Baum.

$P(\bar{E}) = 0{,}99 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot \ldots \cdot 0{,}91 \approx 0{,}6282$

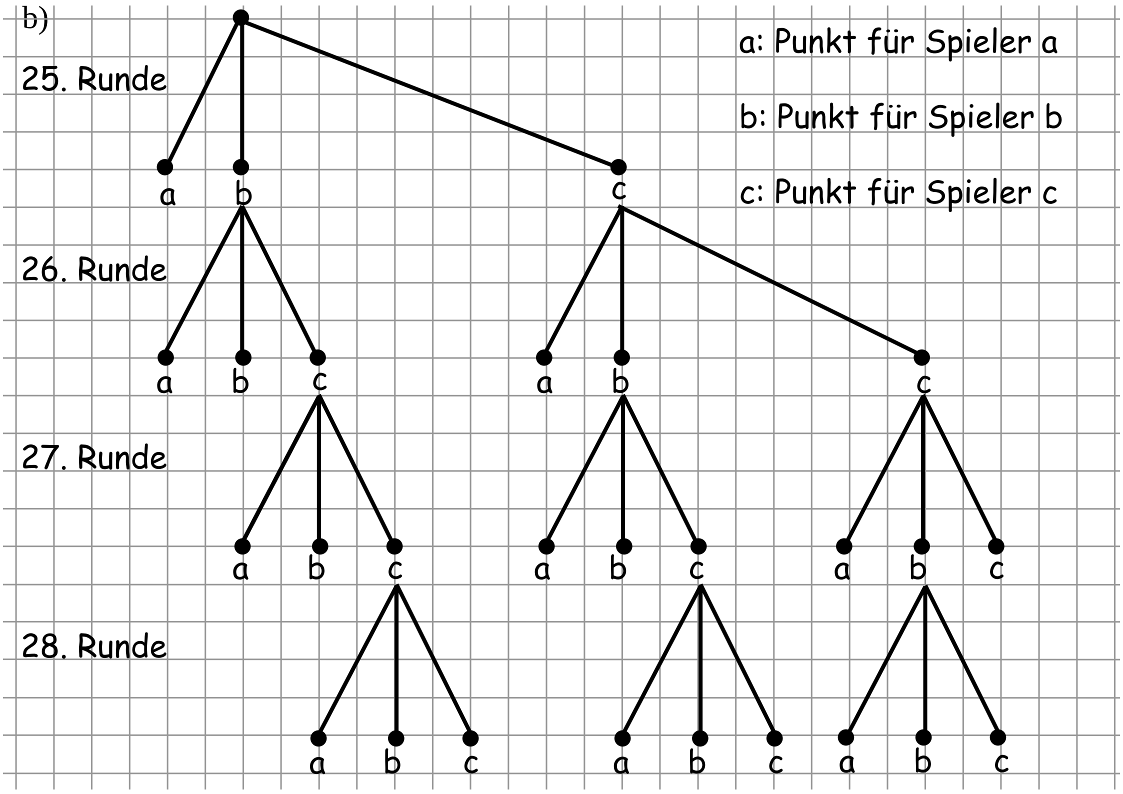
$P(E) = 1 - P(\bar{E}) \approx 0{,}3718$

c)

| Schülerzahl | 24 | 25 | 26 | 30 |
|---|---|---|---|---|
| Wahrscheinlichkeit | 0,951 | 0,962 | 0,972 | 0,992 |

24. a) ---

b)




c) $P(A)=\frac{19}{27};\ P(B)=\frac{6}{27};\ P(C)=\frac{2}{27}$.

d) 190 € − 60 € − 20 € .

25. **Verteilung von Kugeln**

Vier Kugeln werden zufällig auf drei Fächer verteilt.

a) 4 Stufen, 81 Wege, jeder Weg hat die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{3}\right)^4$.

$\Omega$ = Menge aller 4-Tupel aus $\{1; 2; 3\}$.

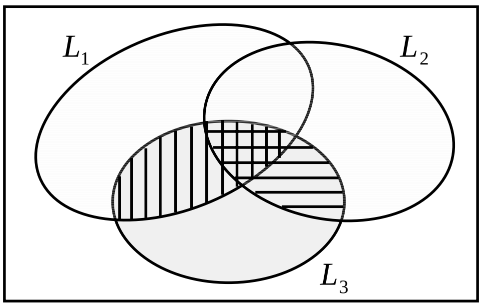
b) $P(L_1)=P(L_2)=P(L_3)=\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

c) $P(L_1\cap L_2)=\left(\frac{1}{3}\right)^4$.

d) $P(L_1\cup L_2)=P(L_1)+P(L_2)-P(L_1\cap L_2)=\frac{31}{81}$.

e) *Einschub:*

$\left(L_1\cup L_2\right)\cap L_3 = \left(L_1\cap L_3\right)\cup\left(L_2\cap L_3\right)$.



f)
$$
\begin{aligned}
P(L_1 \cup L_2 \cup L_3) &= P\big((L_1 \cup L_2) \cup L_3\big) \\
&= P(L_1 \cup L_2) + P(L_3) - P\big((L_1 \cup L_2) \cap L_3\big) \\
&= P(L_1 \cup L_2) + P(L_3) - P\big((L_1 \cap L_3) \cup (L_2 \cap L_3)\big) \\
&= P(L_1 \cup L_2) + P(L_3) - \big[P(L_1 \cap L_3) + P(L_2 \cap L_3) - P(L_1 \cap L_2 \cap L_3)\big] \\
&= P(L_1 \cup L_2) + P(L_3) - P(L_1 \cap L_3) - P(L_2 \cap L_3) + P(\{\ \}) \\
&= \frac{31}{81} + \frac{16}{81} - \frac{1}{81} - \frac{1}{81} + 0 \\
&= \frac{45}{81} \\
&= \frac{5}{9}\,.
\end{aligned}
$$

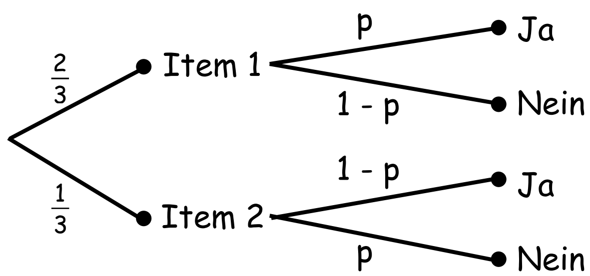
g) $\frac{4}{9}$.

h) $\frac{50}{81} \approx 0,6173$; allgemein: $\frac{3^n - 2^{n+1} - 2^n + 3}{3^n}$ $(n \geq 3)$.

26. a) Die Schüler werden wohl kaum ehrlich antworten.

b) Man kann jetzt mit einer größeren Bereitschaft zur Teilnahme und mit größerer Ehrlichkeit rechnen, weil die Befragung in ein Spiel eingebunden ist.

c)




$P(\text{„Ja"}) = \frac{2}{3} \cdot p + \frac{1}{3} \cdot (1 - p) = \frac{1}{3} \cdot p + \frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{3} \cdot p + \frac{1}{3} \approx \frac{351}{816} \approx 0{,}43$

$p \approx 0{,}29$

29% von 900 Schülern = 261 Schüler, die rauchen.

# Bedingte Wahrscheinlichkeit

27. a)/b)

| $\omega$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{3}{15}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{5}{15}$ |
| $P_B(\omega)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{3}{6}$ | 0 | 0 |

Ereignis B: Die gezogene Kugel ist rot.

- Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses 1, wenn das Ereignis B eingetreten ist: $P_B(1) = \frac{1}{6}$.
- Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses 2, wenn das Ereignis B eingetreten ist: $P_B(2) = \frac{2}{6}$.
- Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses 3, wenn das Ereignis B eingetreten ist: $P_B(3) = \frac{3}{6}$.
- Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses 4 (des Ergebnisses 5), wenn das Ereignis B eingetreten ist: $P_B(4) = P_B(5) = 0$.

c)

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von A, wenn du nichts über die Farbe der Kugel weißt?

  $P(A) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{3}{5}$.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von A, wenn du weißt, dass die gezogene Kugel rot ist?

  $P_B(A) = P_B(1) + P_B(3) + P_B(5) = \frac{2}{3}$.
- $P(A) = \frac{3}{5} < \frac{2}{3} = P_B(A)$.

d)

$P(A') = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

$P_B(A') = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$P_B(A') < P(A')$.

28. a)

| $\omega$ | r | s | w |
|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{5}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{10}$ |
| $P_B(\omega)$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | 0 |

b)

| $\omega$ | (w\|w) | (w\|z) | (z\|w) | (z\|z) |
|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $P_B(\omega)$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $P_C(\omega)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 |

c)

| $\omega$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| $P_B(\omega)$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| $P_C(\omega)$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| $P_{B\cap C}(\omega)$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |

29. a)/b)

| $\omega$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Mittelpunkts-winkel | 60° | 90° | 120° | 90° |
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $P_B(\omega)$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | 0 |

c)

- $P(B) = \frac{3}{4}$
- $\frac{P(1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9} = P_B(1)$
- $\frac{P(2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} = P_B(2)$
- $\frac{P(3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{9} = P_B(3)$

d) Gegeben ist ein ZE, ein Ergebnis $\omega$ und ein Ereignis B.

Für die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses $\omega$ unter der Bedingung, dass das Ereignis B eingetreten ist, gilt:

$$P_B(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } \omega \notin B \\ \dfrac{P(\omega)}{P(B)} & \text{, wenn } \omega \in B \end{cases}.$$

30. a) $P_B(1) = \dfrac{P(1)}{P(B)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{1}{2}$.

$P_B(2) = P_B(4) = P_B(6) = 0$.

$P_B(3) = P_B(5) = \dfrac{0{,}15}{0{,}6} = \frac{1}{4}$.

b) Petra und Peter wollen die Bedeutung der Zahl $P_B(1)$ herausfinden.

Peter: Stell dir vor, wir machen eine Versuchsreihe mit 1000 Versuchen.

Petra: Dann tritt das Ereignis B ungefähr 600-mal ein, und die Augenzahl 1 wird ungefähr 300-mal gewürfelt.

Peter: Jetzt können wir ausrechnen, in ungefähr welchem Anteil der Versuche, bei denen das Ereignis B eintritt, die Augenzahl 1 gewürfelt wird.

Mögliche Antwort: In ungefähr der Hälfte der Versuche, bei denen das Ereignis *B* eintritt, wird die Augenzahl 1 gewürfelt.

c) $P_C(1) = \frac{3}{8}$; $P_C(2) = P_C(6) = \frac{1}{8}$; $P_C(3) = P_C(5) = \frac{3}{16}$; $P_C(4) = 0$.

31. a)

| $\omega$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| $P_B(\omega)$ | 0 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | 0 | $\frac{1}{10}$ |

b) $A = \{4; 5; 6; 7; 8\}$

$P_B(A) = P_B(4) + P_B(5) + P_B(6) + P_B(7) + P_B(8) = 0{,}4$

c)

$$P_B(A) = P_B(4) + P_B(5) + P_B(6) + P_B(7) + P_B(8) \qquad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

$$= P_B(4) + P_B(6) + P_B(8) \qquad P_B(5) = P_B(7) = 0,\ \text{da } 5 \notin B,\ 7 \notin B$$

$$= \frac{P(4)}{P(B)} + \frac{P(6)}{P(B)} + \frac{P(8)}{P(B)} = \frac{P(4)+P(6)+P(8)}{P(B)} \qquad \text{Formel A 34 d)}$$

Also: $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. $\qquad A \cap B = \{4; 6; 8\}$

d) $P_B(C) = \frac{8}{10}$, $P_C(B) = \frac{8}{11}$.

32. a) $P_B(A) = \dfrac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{3}{5}$.

b) Bei einem Laplace-Experiment gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis B eingetreten ist:

$$P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

33. a)
- $P(A) = 0{,}2$;
- $P(B) = 0{,}33$.

b) $A \cap B$: Die Zahl ist durch 5 und durch 3 teilbar. $P(A \cap B) = 0{,}06$.

c) $P_B(A) = \dfrac{|A \cap B|}{|B|} \approx 0{,}1818$.

d)
- 0,04;
- ungefähr 0,1212.

# Conditional probability problems

34. Die Rechenregel (1) ergibt sich aus der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit (Seite 202 im Arbeitsbuch) durch Umformen.

35. a) $P(A \cap B) = 0{,}12$.
    b) $P(A) = 0{,}42$.
    c) $P_A(B) \approx 0{,}2857$.
    d) $P_{\overline{B}}(A) = 0{,}5$.
    e) $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} + \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$.

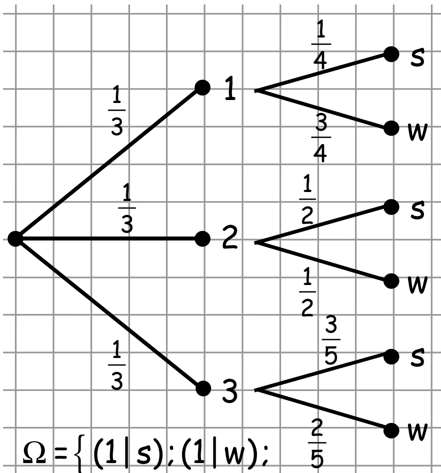
36. a) $\Omega =$ Menge aller 2-Tupel aus $\{1; 2; \ldots; 6\}$; $P(\omega) = \frac{1}{36}$ für alle $\omega \in \Omega$.
    b) $\frac{5}{36}$
    c) $\frac{1}{8}$
    d) 0
    e) 1

37. a)/b)

| ω | 0 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $P_B(\omega)$ | 0 | 0,64 | 0,32 | 0,04 |
| $P(\omega)$ | 0,1 | 0,576 | 0,288 | 0,036 |

c) $C$: Sarah trifft die Scheibe. $P(C) = 0{,}96$.
   $P_C(5) = 0{,}3125$; $P_C(3) = 0{,}4375$; $P_C(1) = 0{,}25$.

38.




$\Omega = \{(1|s); (1|w); (2|s); (2|w); (3|s); (3|w)\}$

Ereignisse:

$U_1$: Die Kugel stammt aus Urne 1.

$U_2$: Die Kugel stammt aus Urne 2.

$U_3$: Die Kugel stammt aus Urne 3.

S: Die Kugel ist schwarz.

W: Die Kugel ist weiß.

Es gilt $W = \overline{S}$ .

a)
- $U_1 = \{(1|s); (1|w)\}$
- $U_2 = \{(2|s); (2|w)\}$
- $U_3 = \{(3|s); (3|w)\}$
- $S = \{(1|s); (2|s); (3|s)\}$
- $W = \{(1|w); (2|w); (3|w)\}$

b)

$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$

$P_{U_1}(S) = \frac{1}{4}$ $P_{U_2}(S) = \frac{1}{2}$ $P_{U_3}(S) = \frac{3}{5}$

$P_{U_1}(W) = \frac{3}{4}$ $P_{U_2}(W) = \frac{1}{2}$ $P_{U_3}(W) = \frac{2}{5}$

c)
- $P(S) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$
- $P(W) = 1 - P(S) = \frac{11}{20}$

d) ---

e)

$$P_S(U_1) = \frac{P(U_1 \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{9}{20}} = \frac{5}{27}$$

$P_S(U_2) = \frac{10}{27}$ ; $P_S(U_3) = \frac{12}{27}$

f) $P_W(U_1) = \frac{15}{33}$; $P_W(U_2) = \frac{10}{33}$; $P_W(U_3) = \frac{8}{33}$.

Die Kugel stammt am wahrscheinlichsten aus Urne 1.

$P(\text{„Fehlentscheidung"}) = \frac{18}{33} \approx 0{,}545.$

39.

| | Jungen | Mädchen | $\Sigma^*$ |
|---|---|---|---|
| mit PC | 45 | 32 | 77 |
| ohne PC | 21 | 32 | 53 |
| $\Sigma$ | 66 | 64 | 130 |

a) $P(J) \approx 0,51$; $P(M) \approx 0,49$; $P(C) \approx 0,59$.

b) • $P_J(C) \approx 0,68$,

• $P_M(C) = 0,5$.

c) $P_C(M) = \frac{|M \cap C|}{|C|} = \frac{32}{77} \approx 0,42$.

40. a)

| | Klasse 9a | Klasse 9b | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|
| Gleichungslöser | 24 | 27 | 51 |
| Nicht Gleichungslöser | 1 | 3 | 4 |
| $\Sigma$ | 25 | 30 | 55 |

b) $P(A) \approx 0,4545$; $P(B) \approx 0,5455$; $P(L) \approx 0,9273$.

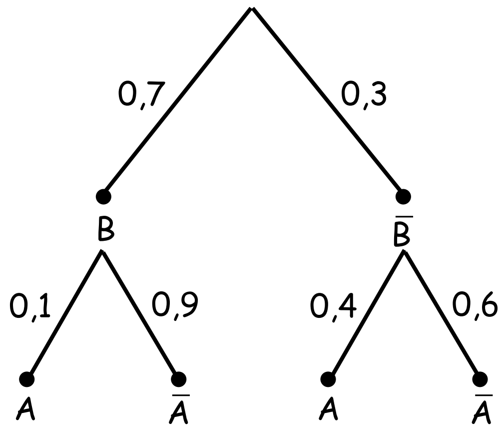
c) $96\% = P_A(L)$; $90\% = P_B(L)$.

d) • $P_L(A) = \frac{24}{51} \approx 0,4706$,

• $P_{\bar{L}}(A) = \frac{1}{4} = 0,25$.

41. a) $P(B) = 0,7;$

$P_B(A) = 0,1\ ;\ P_{\overline{B}}(A) = 0,4\ .$




b) Die einzelnen Stufen des Baumes beschreiben Ereignisse: In der ersten Stufe wird entschieden, ob die gezogene Kugel blau ist oder nicht, in der zweiten Stufe wird über die Teilbarkeit durch 8 entschieden.

c)
- $P(B \cap A) = P(B) \cdot P_B(A) = 0,7 \cdot 0,1 = 0,07.$
- $P(\overline{B} \cap A) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12.$
- $P(A) = P(B \cap A) + P(\overline{B} \cap A) = 0,19.$

Ja, mit Hilfe der Multiplikations- und Additionsregel für Wege.

d)
- $P(B \cap \overline{A}) = 0,7 \cdot 0,9 = 0,63.$
- $P(\overline{B} \cap \overline{A}) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18.$
- $P(\overline{A}) = 0,7 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,6 = 0,81.$

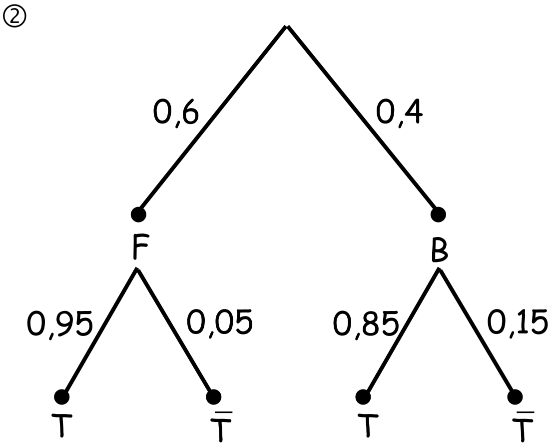
Probe: $P(A) + P(\overline{A}) = 0,19 + 0,81 = 1.$

e) $$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,07}{0,19} \approx 0,3684$$

f)

| | $B$ | $\overline{B}$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | 70 | 120 | 190 |
| $\overline{A}$ | 630 | 180 | 810 |
| $\Sigma$ | 700 | 300 | 1000 |

42. ① $B$: Peter kommt mit dem Bus.
$F$: Peter kommt mit dem Fahrrad.
$T$: Die Fahrzeit beträgt weniger als 20 Minuten.
Gegeben: $P(B)=0,4$; $P(F)=0,6$;
$P_B(T)=0,85$; $P_F(T)=0,95$.
Gesucht: $P(T)$, $P_{\overline{T}}(B)$.

②



③ $P(T)=P(B\cap T)+P(F\cap T)$
$=0,4\cdot 0,85+0,6\cdot 0,95=0,91.$

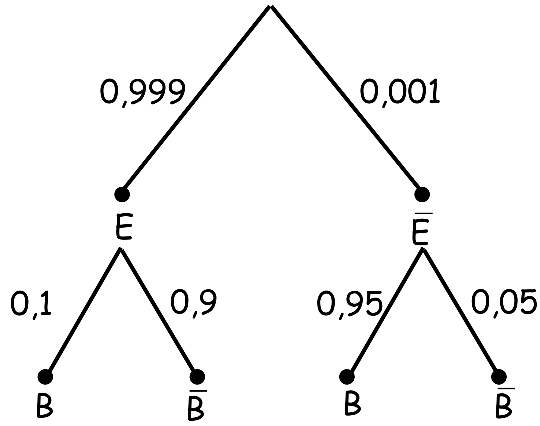
④ $P_{\overline{T}}(B)=\dfrac{P(\overline{T}\cap B)}{P(\overline{T})}=\dfrac{0,4\cdot 0,15}{1-P(T)}=\frac{2}{3}$ .

43. a) ---

b) $E$: Schein echt.
$B$: Blinkalarm.
Gesucht: $P_B(E)$.

$$P_B(E)=\frac{P(B\cap E)}{P(B)}$$
$$=\frac{0,999\cdot 0,1}{0,999\cdot 0,1+0,001\cdot 0,95}\approx 0,991.$$

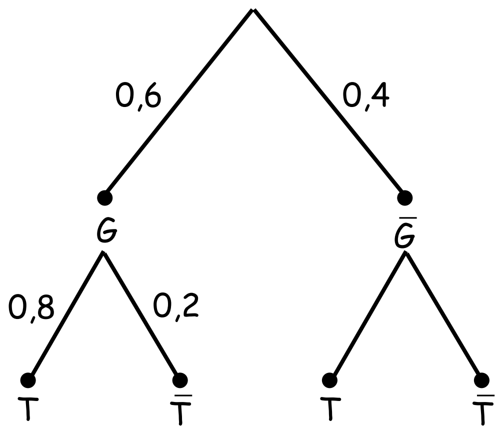
Der Schein ist trotz Blinkalarm mit 99,1% Wahrscheinlichkeit echt.




c) Durch die hohe Fehlerquote bei den echten Scheinen.

44. a) $G$: Geeignet.
$T$: Test bestanden.
Gesucht: $P_T(G)$.

$$P_T(G)=\frac{P(T\cap G)}{P(T)}=\frac{0,48}{0,5}=0,96.$$




b) $P_{\overline{T}}(G)=\dfrac{P(\overline{T}\cap G)}{P(\overline{T})}=\dfrac{0,12}{0,5}=0,24.$

45. a) $P(M)=0,6$; $P(S)=0,7$; $P(F\cap S)=0,16$.

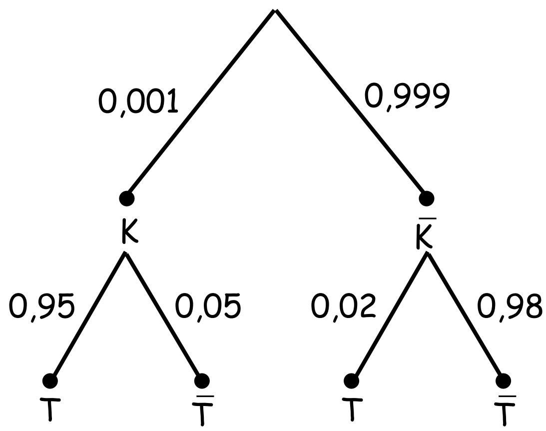
b) $P(M\cap S)$ = $P$ („ausgewählte Person ist männlich und treibt Sport“)
= $P(S)-P(F\cap S)=0,54$.

$P_M(S)$ = $P$(„Ein ausgewählter Mann treibt Sport“) = $\dfrac{P(M\cap S)}{P(M)}=0,9$ .

$P_S(M)$ = $P$(„ausgewählte Person, die Sport treibt, ist männlich“)
= $\dfrac{P(S\cap M)}{P(S)}\approx 0,7714$ .

46. $K$: Krank.
$T$: Test positiv.
Gesucht: $P_T(K)$.

$$P_T(K) = \frac{P(T \cap K)}{P(T)}$$
$$= \frac{0,001 \cdot 0,95}{0,001 \cdot 0,95 + 0,999 \cdot 0,02}$$
$$\approx 0,045.$$




47. **Ziegenproblem**

a) **So**

$P(A_1) = \frac{1}{3}$ und damit $P(A_2 \cup A_3) = \frac{2}{3} = P_B(A_2)$, also wechseln.

**oder so**

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wagen hinter der zuerst gewählten Tür steht beträgt $\frac{1}{3}$; dass er hinter einer der beiden anderen Türen steht, somit $\frac{2}{3}$. Also wechseln.

b) ---

# Unabhängige Ereignisse

48. a) ---

b) $P(C) = \frac{5}{12}$; $P_B(C) = \frac{|B \cap C|}{|B|} = \frac{1}{3} < P(C)$

c) $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{3} = P(A)$

$P_B(A)$ hängt nicht von B ab.

d) $P(B) = \frac{3}{4}$; $P_A(B) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{3}{4} = P(B)$

$P_A(B)$ hängt nicht von A ab.

e) Z. B. $E = \{2; \ldots; 9\}$; $P(E) = \frac{2}{3} = P_B(E)$; $P(B) = \frac{3}{4} = P_E(B)$.

49. a) Behauptung: $P_B(A) = P(A) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$

Beweis:

$$P_B(A) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$
$$\Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$$

b) Für zwei Ereignisse A und B mit $P(A), P(B) > 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $P_B(A) = P(A)$.
2) $P_A(B) = P(B)$.
3) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Wenn eine der Bedingungen erfüllt ist, heißen die Ereignisse A und B **unabhängig**.

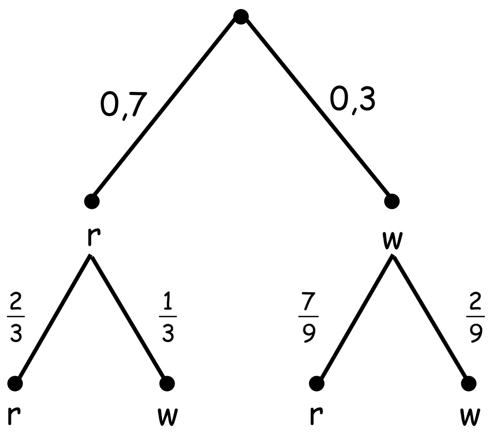
50. a) ---

b)
- Vermutung: A und B sind unabhängig.
- Rechnung: $P(A) = \frac{1}{4}$ ; $P(B) = \frac{1}{8}$ ;

  $P(A \cap B) = \frac{1}{32} = P(A) \cdot P(B)$ .
- Ergebnis: A und B sind unabhängig.

c) Weitere unabhängige Ereignisse: *A* und *D*, *B* und *C*, *C* und *D*. *A* und *C* sowie *B* und *D* sind abhängig.

51. a)




b) Die Ereignisse *A* und *B* sind abhängig.

c) Die Ereignisse *A* und *B* sind unabhängig.

52. *L*: Luftbläschen; *F*: Farbfehler.

$P(L) = \frac{91}{600}$; $P(F) = \frac{59}{600}$; $P(L \cap F) = 0,015 \approx 0,0149 = P(L) \cdot P(F)$.

Die Annahme ist gerechtfertigt.

53. a)
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,5$ ,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{11}{12}$.

b) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ und $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$. Damit folgt $P(A) = 0,8$; $P(B) = 0,6$; $P(A) \cdot P(B) = 0,48 = P(A \cap B)$. *A* und *B* sind unabhängig.

54. a) $P_B(\overline{A}) \underset{\text{Gegenereignisregel}}{=} 1-P_B(A) \underset{\text{Unabhängigkeit}}{=} 1-P(A) \underset{\text{Gegenereignisregel}}{=} P(\overline{A})$

Wenn A und B unabhängig sind, dann sind auch $\overline{A}$ und B unabhängig sowie A und $\overline{B}$.

b) $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 1 - P_{\overline{B}}(A) = 1 - \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = 1 - \dfrac{P(A)\cdot P(\overline{B})}{P(\overline{B})} = 1 - P(A) = P(\overline{A})$.

55. a) $P(M \cap F) = 0{,}8775$.

b) $P(M \cup F) = 0{,}9975$.

c) $P(\overline{M} \cap F) = 0{,}0975$.

d) $P(M \cap \overline{F}) = 0{,}0225$.

56. a) $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B) = 0{,}15$.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}) = 0{,}35$.

Oder: $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 0{,}35$.

57. a) $M_i$: Modul $i$ ist störungsfrei.

$P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) + P(M_2) - P(M_1)\cdot P(M_2) = p + p - p\cdot p = 2p - p^2$.

b) $2p - p^2 \geq 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad (p-1)^2 \leq 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}9 \leq p \ (\leq 1{,}1)$.